Alcuni cenni sulla propagazione degli errori (o incertezze)

a cura di Giancarlo Buccella

La misura esatta di una grandezza fisica è un dato teorico sperimentalmente inaccessibile e quindi sperimentalmente privo di significato. Ogni misura porta con sé inevitabilmente un certo incertezza, che nel caso di una misura singola corrisponde alla sensibilità dello strumento utilizzato per effettuare la misura, cioè alla minima variazione della grandezza che lo strumento riesce a rilevare. Un esempio per tutti è il seguente: se sopra una bilancia poniamo un oggetto di un peso inferiore alla sensibilità minima la lancetta non si sposterà dallo zero, la sensibilità sarà il peso minimo che la bilancia riesce a rilevare.

Facendo ad esempio una misura di lunghezza con un metro da sarto, che una come sensibilità il millimetro, l'incertezza da associare alla misura sarà 1 mm o se si è particolarmente attenti nella misura ci si potrebbe spingere alla metà della sensibilità ossia 0.5 mm, ma certamente non oltre.

In questa nota useremo come sinonimi le parole incertezza ed errore.

Misura singola

Pertanto nel caso di misura unica il risultato della nostra misura (di una data grandezza x) sarà:

$$(x \pm \Delta x)\ u$$

Dove u sta per 'unità di misura' e dipende dalla unità di misura adottata per la grandezza misurata, e il Δx rappresenta l'incertezza sulla misura, che in questo caso coincide alla sensibilità dello strumento (o tutt'al più alla sua metà).

Per semplicità nel seguito ometteremo di scrivere le unità di misura.

Il valore numerico di Δx definisce il numero di cifre significative con cui ha senso esprimere x. Vale la seguente regola:

la posizione decimale dell'ultima cifra diversa da zero deve essere la stessa sia nel valore della misura (x) che nell'incertezza (Δx).

Ad esempio, se il valore della misura è 186.77 cm con un incertezza di 0.3 cm è errato scrivere 186.77 ± 0.3 dato che la posizione della cifra dell'incertezza è sui decimi anche il numero che esprime la misura dovrà fermarsi (cioè avere una cifra diversa da zero) ai decimi, e quindi andrà scritto così 186.8 ± 0.3, se invece l'incertezza sarebbe 3 allora si dovrebbe scrivere 187 ± 3, se ancora l'incertezza sarebbe 30 (ossia nelle decine) il risultato della misura dovrà avere cifre diverse da zero fino alle decine, e quindi si avrebbe non 187 ± 30 ma 190 ±30.

Eccezione alla regola: se la prima cifra dell'incertezza è molto piccola (1 o anche 2), può essere conveniente conservare nel numero che esprime la misura una cifra in più, ossia potrebbe avere senso una scrittura del tipo 33.7 ± 1 perché se scrivessimo 34 ± 1 il valore della misura risulta aumentato di 0.3 che non è proprio una quantità piccola rispetto al valore dell'incertezza 0.3.

Misure ripetute

Per effettuare la misura di una grandezza, abbiamo bisogno di uno strumento di misura. È impossibile ottenere il valore esatto di una grandezza, perché ogni misura è soggetta a tre tipi di imprecisione di cui la prima riguarda solamente il caso della misura singola.

1. la sensibilità dello strumento di misura, cioè la grandezza più piccola che posso misurare.

Esempio: con un normale righello la divisione più piccola corrisponde a 1 mm. Perciò non possiamo misurare lunghezze più piccole di 1 mm e ogni misura ha un'incertezza pari 1 mm.

2. l'errore casuale, causato da piccole e imprevedibili variazioni, che aumentano e diminuiscono di poco il risultato della misura.

Esempio: quando cronometriamo una corsa di velocità, la prontezza di riflessi aumenta o diminuisce casualmente il valore del tempo che registriamo.

3. l'errore sistematico è causato da un difetto dello strumento di misura o del metodo utilizzato, e si ripete identico ad ogni misura.

Esempio: un orologio che va troppo piano o una bilancia tarata male modificano sistematicamente le misure.

Nel seguito **non terremo conto dell'errore sistematico** in quanto esso qualora si presenti è in genere facilmente identificabile ed eliminabile da un bravo operatore.

Al fine di fare misure più accurate è conveniente ripetere l'operazione di misura più volte, infatti in questo modo si ottiene un valore dell'incertezza più piccolo rispetto a quello ottenuto facendo una sola misura. Facendo N misure di una data grandezza x, si ottengono N risultati non tutti uguali fra loro, quindi è solo possibile dire che la nostra misura sarà compresa fra il valore massimo e minimo fra quelli ottenuti.

Valori ottenuti: $x_1, x_2, x_3, \ldots x_N$ fra questi valori ci sarà quello massimo x_{max} e quello minino x_{min}.

Un primo approccio è quello di definire il valore più probabile (ossia il numero finale da scrivere come risultato della misura, che indicheremo con il simbolo $\overline{x}$) la media aritmetica dei valori ottenuti associando a questo valore una incertezza data dalla semidispersione.

Cioè si pone

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_N}{N}$$

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{\min}}{2}$$

Il risultato risulterà espresso nel seguente modo

$$x = \overline{x} \pm \Delta x$$

dove Δx viene detto incertezza assoluta (o errore assoluto).

<u>Regola</u>: **Il valore fornito dall'incertezza deve essere espresso con una sola cifra diversa da zero,** ad esempio se il calcolo ci dà 0.0341 l'incertezza va espresso come 0.03, se invece il risultato è 93.2 si dovrà scrivere 90.

Eccezione: se la prima cifra dell'incertezza è 1 (o eventualmente 2) per non essere troppo brutali nell'approssimazione si potrebbe conservare due cifre anziché una soltanto. Ad esempio se $\Delta x = 0.138$ si potrebbe scrivere 0.14 anziché 0.1.

Oltre alla semidispersione ci sono altre modalità di calcolo per determinare l'errore.

Errore relativo

Si possono avere misure con lo stesso errore assoluto ma precisione molto diversa. Ad esempio, se misuriamo la lunghezza del pollice della mano (circa 2 cm) e facciamo un errore di 1 cm, abbiamo così una misura molto grossolana. Ma se facciamo lo stesso errore di 1 cm nel misurare l'altezza del Colosseo (circa 50 m), avremo una misura molto più precisa. Eppure, l'errore assoluto è identico. Per avere una indicazione della precisione della misura si introduce l'incertezza relativa definita come rapporto fra l'incertezza ed il valore della misura

$$\Delta_{rel} x = \frac{\Delta x}{\bar{x}}$$

A volte è utile esprimere tale numero percentualmente e si parla allora di incertezza percentuale:

L'**errore percentuale** è pari all'errore relativo moltiplicato per 100, e si indica con il segno %.

Ad esempio se la lunghezza di un pollice è di 2 cm e l'errore di misura è di 1 cm, l'errore relativo vale

$$\Delta_{rel} L = \frac{\Delta L}{\bar{L}} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\% \qquad \text{(errore di una parte su 2)}$$

Nel caso invece della misura dell'altezza del Colosseo avremo

$$\Delta_{rel} L = \frac{\Delta L}{\bar{L}} = \frac{1}{5000} = 0.0002 = 0.02\% \qquad \text{(errore di una parte su 5000)}$$

Diremo perciò che la seconda misura è molto più precisa della prima.

Propagazione degli errori

Quando siamo di fronte a dover **misurare delle grandezze derivate**, ossia quelle grandezze che si definiscono a partire dalle sette grandezze fondamentali che si ottengono moltiplicando o dividendo, tra loro due o più grandezze fondamentali, ci si pone il problema di capire quale errore associare alla **misura** che non sarà più una misura diretta ma **indiretta**. Ricordiamo che una **misura diretta si ottiene confrontando direttamente l'oggetto da misurare con la relativa unità di misura.** Se ad esempio volessimo misurare l'area di un pavimento quadrato, con una misura diretta dovremo dotarci di una unità di area (ad esempio un foglio A4) e vedere quante volte il foglio "ci stà" su tutto il pavimento, ovviamente un modo impraticabile, quindi si ricorre alla misura indiretta, ci occorrerà fare solo una misura di lunghezza (grandezza fondamentale) e poi per calcolare l'area dovremo semplicemente elevare al quadrato tale valore: $A = L^2$. Si pone allora il seguente problema: che errore associare alla misura?

Somma e differenza

Siano A e B due grandezze omogenee, e le loro misure siano

$$\begin{cases} A = a \pm \Delta a \\ B = b \pm \Delta b \end{cases} \quad \text{risultato} \quad \begin{matrix} somma & C = (a+b) \pm (\Delta a + \Delta b) \\ differenza & C = (a-b) \pm (\Delta a + \Delta b) \end{matrix}$$

L'errore relativo è $\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$

Quindi, generalizzando possiamo dire che: **l'errore assoluto** (detto anche massimo) associato a una grandezza fisica che è il risultato della **somma, o della differenza** o di una combinazione di esse, fra due o più grandezze, ciascuna misurata con la propria incertezza, **si ottiene sommando gli errori** delle singole grandezze.

Prodotto e divisione

Siano A e B due grandezze omogenee, e le loro misure siano

$$\begin{cases} A = a \pm \Delta a \\ B = b \pm \Delta b \end{cases} \quad \text{risultato} \quad \begin{matrix} prodotto & C = (a \cdot b) \pm (b\,\Delta a + a\,\Delta b) \\ quoziente & C = (\frac{a}{b}) \pm \left(\frac{b\Delta a + a\,\Delta b}{b^2} \right) \end{matrix}$$

L'errore relativo è $\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$

Quindi, generalizzando possiamo dire che:
l'errore relativo associato a una grandezza fisica che è il risultato del **prodotto, o del quoziente** o di una combinazione di essi, fra due o più grandezze, ciascuna misurata con la propria incertezza, si ottiene **sommando gli errori relativi** delle singole grandezze.

Potenza

Si tratta di un caso particolare del prodotto in quanto si sta moltiplicando per se stesso un numero n volte. L'errore relativo associato al risultato di un'operazione di potenza è dato da n volte l'errore relativo della base della potenza.

Sia

$A = a^n$ risultato $A = a^n \pm n(a^n \frac{\Delta a}{a})$ l'errore relativo è $\frac{\Delta A}{A} = n\frac{\Delta a}{a}$; $\Delta A = a^n n \frac{\Delta a}{a}$

Prodotto per una costante

Consideriamo adesso il caso in cui la grandezza di cui vogliamo stimare l'errore sia il risultato del prodotto di un'altra grandezza che misuriamo con una costante priva di indeterminazione. Sia cioè:

C= k b, con k costante.

Utilizzando la regola del prodotto si ha come errore relativo

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta b}{b}$$

ma k non ha incertezza, quindi

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{0}{k} + \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta b}{b} \quad \text{e perciò si ha} \quad \Delta C = C\frac{\Delta b}{b} = kb\frac{\Delta b}{b} = k\Delta b$$

$$\Delta C = k\Delta b$$

L'incertezza assoluta è in questo caso pari a k volte il valore dell'incertezza della misura.

Es: Consideriamo la lunghezza di una circonferenza di cui misuriamo il raggio r = 51.3 ± 0.2 m, si ha

C = 2 π r ± ΔC = 322.164 ± ΔC

l'errore è $\Delta C = 2\pi\,\Delta r = 2\pi \cdot 0.2 = 1.256$ quindi scriveremo

C = 322.164 ± 1.256 cioè

C = (322 ± 1) m

Come si vede se il valore della costante ha fatto passare il valore dell'incertezza da 0.2 ad 1!

Esercizi

Esercizio n. 1

Per il volume di una bombola è stato trovato il valore (30.18 ± 0.04) L. Qual è il volume complessivo di 12 bombole identiche?

L'incertezza sulle 12 bombole è 12 volte l'incertezza su una singola bombola $\Delta V = 12 \cdot 0.04 = 0.48 = 0.5$ L

Il volume totale è $30.18 \cdot 12 = 362.16$ L. Quindi la risposta è 362.2 ± 0.5

Esercizio n. 2

Il perso di un foglio di carta di area 1 m^2 è stato valutato come (80.4 ± 0.7) g. Che cosa si può dire del peso di 1 cm^2 di quella carta?

Dato che 1 $cm^2 = 10^{-4}$ m^2 il valore più probabile del peso di 1 cm^2 sarà $80.4 \cdot 10^{-4}$ g con incertezza $0.7 \cdot 10^{-4}$ g

Esercizio n. 3

Il peso di un secchio vuoto è (1.44 ± 0.03) kg. Il peso dello stesso secchio pieno di acqua è (12.38 ± 0.06) kg. Qual è il peso dell'acqua nel secchio?

Il peso dell'acqua è 12.38 – 1.44 = 10.94 kg. L'incertezza è la somma delle incertezze: 0.03 + 0.06 = 0.09 kg. L'acqua contenuta nel secchio pesa quindi (10.94 ± 0.09) kg.

Esercizio n. 4

Sapendo che il diametro di una sfera è d = (14.46 ± 0.16) cm, se ne deduca la misura del volume.

Il raggio è la metà del diametro d = 2R

R = ½ d = 14.46 / 2 = 7.23 cm;   L'incertezza assoluta sul raggio è: ΔR = ½ Δd = 0.16 / 2 = 0.08 cm

R = (7.23 ± 0.08) cm

Il volume della sfera è $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 7.23^3 = 1.583 cm^3$

$\Delta V = \frac{4}{3}\pi\,\Delta(R^3) = k\Delta(R^3)$ dove k = 4.12

L'errore percentuale del cubo del raggio è

$$\frac{\Delta(R^3)}{R^3} = 3\frac{\Delta R}{R} = 3\frac{0.08}{7.23} = 0.033 = 3.3\%$$
$$\Delta(R^3) = 0.033\,R^3 = 0.033 \cdot 7.23^3 = 12.47\,cm^3$$

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi\,\Delta(R^3) = 4.12 \cdot 12.47 = 51.38\,cm^3$$

Quindi con gli opportuni arrotondamenti si ha

V = (1580 ± 50) cm^3

Esercizio n. 5

Supponendo che il valore del diametro di una sfera sia di 10 cm, con quale incertezza dovrebbe essere dato il tale valore per avere un'area della superficie sferica avente incertezza di 1 cm^2?

L'area della superficie sferica è

$$A = \pi R^2$$

Il raggio vale R = 5 ± Δx (l'incertezza su R è la nostra incognita)

Se l'incertezza su A deve essere di 1 cm^2 significa scrivere ΔA = π $\Delta(R^2)$ = 1 cm^2

l'incertezza su R^2 vale $$\Delta(R^2) = R^2\,2\frac{\Delta R}{R} = 5^2 \cdot 2\frac{\Delta x}{5} = 10\,\Delta x$$

ΔA = π $\Delta(R^2)$ = π 10 Δx = 31.4 = 1 cm^2

Δx = 1 / 31.4 = 0.032 cm = 0.03 cm (3 decimi di millimetro).

Esercizio n. 6

Si determini la misura dell'ipotenusa c di un triangolo rettangolo aventi cateti a e b (tralasciando le unità di misura):

a = 102.3 ± 0.6

b = 48.6 ± 0.3

L'ipotenusa vale c = $(a^2 + b^2)^{1/2}$ = 113.3

Svolgimento n. 1

Calcoliamo gli errori degli addendi usando la formula per le potenze,

$$\Delta_{rel}(a^2) = 2\frac{0.6}{102.3} = 0.01173021$$

$$\Delta(a^2) = \Delta_{rel}(a^2) \cdot a^2 = 0.01173021 \cdot 102.3^2 = 122.76$$

Potevamo anche usare direttamente la relazione dell'errore assoluto

$$\Delta(a^2) = a^n n \frac{\Delta a}{a} = 102.3^2 \cdot 2 \frac{0.6}{102.3} = 122.76$$

Applicando le regole sopra esposte per le approssimazioni si ha

$\Delta(a^2) = 100$ (una sola cifra diversa da zero)

Lo stesso procedimento per l'altro cateto ci offre

$$\Delta(b^2) = b^n n \frac{\Delta b}{b} = 48.6^2 \cdot 2 \frac{0.3}{48.6} = 29.16 \rightarrow= 30$$

Vale la seguente uguaglianza

$$\Delta(c^2) = \Delta(a^2) + \Delta(b^2) = 100 + 30 = 130 \rightarrow= 100$$

Mentre il valore quadro di c è

$c^2 = a^2 + b^2 = 102.3^2 + 48.6^2 = 12827.25$ Calcolando il valore di c da questa relazione si ha c = 113.3

Siccome l'errore è sulle centinaia dovremo scrivere così

$c^2 = 12900 \pm 100$ Calcolando il valore di c da questa relazione approssimata si ha c = 113.6

L'errore relativo è

$$\Delta_{rel}(c^2) = \frac{100}{12900} = 0.007752$$

A noi interessa l'errore su c e non su c^2, calcoliamo dapprima l'errore relativo su c, essendo noto l'errore su c^2 possiamo scrivere così:

$\Delta_{rel}(c) \equiv \Delta_{rel}(c^2)^{1/2} = \frac{1}{2}\frac{\Delta(c^2)}{c^2} = \frac{1}{2}\frac{100}{12900} = 0.00389$ e quindi l'errore assoluto è

$$\Delta(c) = \Delta_{rel}(c) \cdot c = 0.00389 \cdot 113.6 = 0.44 \rightarrow= 0.4$$

In definitiva **c = 113.6 ± 0.4**

<u>Svolgimento n. 2</u>

Si può fare più velocemente calcolando direttamente l'errore di c nel seguente modo

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{1}{2}\frac{\Delta c^2}{c^2}$$

$$\Delta c = c\frac{1}{2}\frac{\Delta c^2}{c^2} = \frac{1}{2}\frac{\Delta c^2}{c} = \frac{1}{2}\frac{\Delta a^2 + \Delta b^2}{c} = \frac{1}{2}\frac{\left(2\frac{\Delta a}{a}\right)a^2 + \left(2\frac{\Delta b}{b}\right)b^2}{c} =$$
$$= \frac{a\Delta a + b\Delta b}{c} = \frac{102.3 \cdot 06 + 48.6 \cdot 0.3}{113.257} = 0.67$$

Avendo il seguente risultato finale **c = 113.3 ± 0.7**

Svolgimento n. 3

Si poteva fare anche usando un ragionamento sui valori estremi di c, avendosi

$$c_{\max} = \sqrt{(a+\Delta a)^2 + (b+\Delta b)^2} = \sqrt{(102.3+0.6)^2 + (48.6+0.3)^2} = 113.98$$
$$c_{\min} = \sqrt{(a-\Delta a)^2 + (b-\Delta b)^2} = \sqrt{(102.3-0.6)^2 + (48.6-0.3)^2} = 112.59$$

Il valor medio è $c_{medio} = \dfrac{c_{\max} + c_{\min}}{2} = 113.3$ la semidispersione è $\Delta c = \dfrac{c_{\max} - c_{\min}}{2} = 0.67$

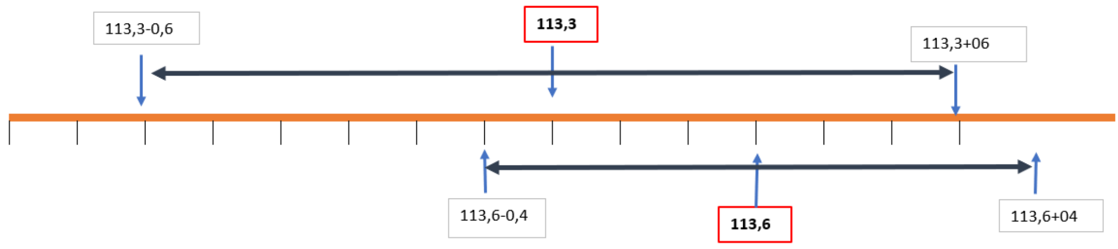
Avendo il seguente risultato finale **c = 113.3 ± 0.7**

Usando la relazione generale della propagazione degli errori si ha (pensando alla funzione $z = (x^2 + y)^{1/2}$ che nel nostro caso diventa $c = (a^2 + b^2)^{1/2}$):

$$\Delta c = \sqrt{\left(\frac{\partial c}{\partial a}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial b}\Delta b\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Delta b\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{102.3}{\sqrt{102.3^2+48.6^2}}0.6\right)^2 + \left(\frac{48.6}{\sqrt{102.3^2+48.6^2}}0.3\right)^2} = 0.6$$

Come si vede il primo approccio sembrerebbe il più preciso ma se guardiamo il risultato offerto dalla formula generale (0.6) esso si discosta maggiormente dal valore corretto, ciò a causa delle sue più numerose approssimazioni fatte durante i calcoli.

Vediamo graficamente la differenza fra i due **intervalli di confidenza**, come si vede le approssimazioni usate nel primo svolgimento introducono uno scostamento del valore della misura di 0.3 mentre sottostima l'errore.



La deviazione standard

Se si fanno delle misure ripetute, diciamo N misure, allora nella teoria degli errori si dimostra che La migliore stima del valore vero della misura della grandezza X della misura è la media aritmetica dei risultati

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_N}{N}$$

Al valore della misura va associato lo **scarto quadratico medio (o deviazione standard)**

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}{N}}$$

A partire dallo scarto quadratico medio si definisce anche il coefficiente di variazione o la *deviazione standard relativa* come il rapporto tra lo scarto tipo e il valore assoluto della media aritmetica della variabile in esame sempreché quella media sia non nulla:

$$\sigma_{x,rel} = \frac{\sigma_x}{\overline{x}}$$

Questo indice relativo (che viene spesso espresso in termini percentuali e consente di effettuare confronti sulla precisione di misure diverse, indipendentemente dalle loro quantità assolute.

La deviazione standard dalla media

La deviazione standard, calcolata su un gruppo di *N* misure, assolve bene il compito di incertezza da associare alla singola misura della grandezza in esame, mentre per quello che riguarda **l'incertezza sulla media** si ricorre ad un'altra grandezza ancor più idonea allo scopo. Tale grandezza è la ***deviazione standard della media*** ed è definita come

$$\sigma_{x,media} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

Purtuttavia la teoria mostra che si può utilizzare questa formula anche per un singolo set di misure. Utilizzando questa nuova grandezza come incertezza da associare alla media di *N* misure. Così facendo si è supposto che le singole misure effettuate si siano distribuite seguendo la distribuzione di Gauss (assunto peraltro assai fondato) e di conseguenza abbiamo considerato la deviazione standard più come incertezza sulle singole misure che sulla media di quest'ultime.

C'è un'ultima **raffinatezza** della teoria che introduce un meno uno (dovuto al fatto che una singola misura x_i viene usata due volte al numeratore (una volta come singola misura ed un'altra come "membro" della media) al denominatore della deviazione standard che diventa quindi

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}{N-1}}$$

In definitiva la formula della **deviazione standard da usare** per la stima di una misura, ripetuta N volte è

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N(N-1)}}}$$

<u>**Questa è la formula corretta da usare in tutti i casi in cui la distribuzione degli errori segua una distribuzione gaussiana.**</u>

N.B.

E' chiaro che per N sufficientemente grande il meno uno al denominatore è del tutto ininfluente e va bene anche usare la relazione

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}}{N}$$

La somma quadratica degli errori (somma in quadratura)

Abbiamo visto che nel caso in cui le **grandezze misurate direttamente si debbano sommare**, allora possiamo stimare l'errore sul risultato come la **somma dei singoli errori assoluti**, mentre quando si procede a delle **moltiplicazioni o a delle divisioni** sono i singoli **errori relativi a venire sommati**.

In questa sezione vedremo come, sotto certe condizioni, le incertezze calcolate utilizzando le suddette regole possano essere più grandi del necessario: costituiscano cioè una sovrastima.

Le condizioni affinché si possa applicare la somma quadratica sono fondamentalmente due e riguardano entrambe gli errori sulle grandezze originarie: questi devono essere

- indipendenti
- casuali

In questo modo le misure iniziali si possono considerare governate da una distribuzione normale (gaussiana): essendo inoltre indipendenti la composizione di due o più distribuzioni da luogo ad una distribuzione nuovamente di tipo normale e con deviazione standard pari alla radice quadrata della somma dei quadrati delle deviazioni standard iniziali.
Vediamo di chiarire questo concetto apparentemente complicato.

Supponiamo di avere misurato le due quantità x e y

$x_m \pm \Delta x$

$y_m \pm \Delta y$

e che queste soddisfino i requisiti che abbiamo illustrato: allora se supponiamo che esse siano governate da due distribuzioni normali di centro rispettivamente X e Y e deviazione standard σ_x e σ_y possiamo sostituire ai loro errori assoluti (Δx e Δy) le rispettive deviazioni standard.

Ora la probabilità di ottenere un particolare valore di x e di y è

$$P(x) \prec \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right); \quad P(y) \prec \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)$$

dove abbiamo posto momentaneamente i valori X e Y uguali a zero per semplicità di calcolo.

Dal momento che sia x che y sono misurati indipendentemente l'uno dall'altro, la probabilità di ottenere un particolare valore di x e contemporaneamente un particolare valore di y è data dal prodotto delle singole probabilità per cui $P(x,y) \prec \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right)$

A questo punto, applicando alcune proprietà matematiche che qui non riportiamo, si può vedere che la probabilità di ottenere un dato valore z = x + y ha la seguente forma

$$P(x+y) \prec \exp\left(\frac{-(x^2+y^2)}{2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}\right)$$

Questo risultato mostra che i valori di z = x + y sono normalmente distribuiti attorno all'origine con deviazione standard pari a

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$$

Se invece di considerare X e Y entrambe nulli li valutiamo con il loro valore reale, giungiamo alla medesima conclusione salvo il fatto che z sarà non più distribuita rispetto all'origine, ma rispetto alla quantità X + Y.

Enunciato:

Se diverse grandezze x, y, ... , w sono misurate con incertezze "indipendenti e casuali" Δx , Δy, Δx, … Δw e tali valori vengono utilizzati per calcolare quantità del tipo

z = x + ... + y − (u + ... +w)

allora l'errore su z è la somma quadratica degli errori originari.

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \ldots + \sigma_w^2}$$

In ogni caso, l'errore σ_z su z non è mai più grande della somma ordinaria dei singoli errori originali

$$\sigma_z \leq \sigma_x + \sigma_y + \ldots \sigma_w$$

Si dimostra che vale anche il seguente enunciato.

Se diverse grandezze x, y, ... , w sono misurate con incertezze "indipendenti e casuali" Δx , Δy, Δx, … Δw e tali valori vengono utilizzati per calcolare quantità del tipo $z = \frac{x \cdot \ldots . \cdot y}{u \cdot \ldots \cdot w}$

allora l'errore su z è la somma quadratica dei singoli errori relativi degli errori originari.

$$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\Delta w}{w}\right)^2}$$

In ogni caso, l'errore relativo di z non è mai più grande della somma ordinaria dei singoli errori relativi

$$\frac{\Delta z}{z} \leq \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \ldots \frac{\Delta w}{w}$$