Giancarlo Buccella

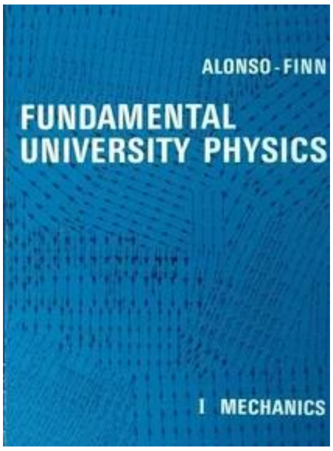
Problemi di Fisica I

tutti i problemi proposti nel testo

"Elementi di Fisica per l'Università – I Meccanica"

Marcelo Alonso e Edward J. Finn

Addison – Wesley (1967)



A mia moglie Anna Maria
Ai miei figli Luca e Stefano

La Terra ama la pioggia, la ama anche l'Etere venerabile;
il Mondo ama fare ciò che deve accadere.
Io dico al Mondo: io amo insieme con te.
Marco Aurelio Pensieri (X 21)

Tutte le cose
Vicine o lontane
In modo nascosto
sono legate le une alle altre
Da una forza immortale
Tale che non potete cogliere un fiore
Senza disturbare una stella.
Francis Thompson

Vedere il Mondo in un granello di sabbia
E il cielo in un fiorellino di campo
L'infinito nel palmo della tua mano
E l'eternità in un'ora.
William Blake

Fare scienza è un modo di "amare Dio con tutto il cuore,
con tutta l'anima e con tutta la mente"
Francis Collins

Decalogo per la risoluzione dei problemi di Fisica

1) Leggere attentamente il testo del problema.

2) Preparare un elenco completo delle quantità date (note) e di quelle cercate (incognite).

3) Disegnare uno schema o un diagramma accurato della situazione. Nei problemi di dinamica, assicurarsi di aver disegnato *tutte* le forze che agiscono su un dato corpo (diagramma di corpo libero).

4) Dopo aver deciso quali condizioni e principi fisici utilizzare, *esaminare le relazioni matematiche che sono valide nelle condizioni date*. Assicurarsi sempre che tali relazioni siano applicabili al caso in esame. È molto importante sapere quali sono le limitazioni di validità di ogni relazione o formula.

5) Molte volte le incognite sembrano troppe rispetto al numero di equazioni. In tal caso è bene chiedersi, ad esempio:

a) esistono altre relazioni matematiche ricavabili dalle condizioni del problema?
b) è possibile combinare alcune equazioni per eliminare alcune incognite?

6) È buona norma risolvere i problemi in modo simbolico e sostituire i valori numerici soltanto alla fine. Conviene anche mantenere traccia delle unità di misura, poiché questo può servire come controllo.

7) Controllare se la soluzione trovata è dimensionalmente corretta.

8) Arrotondare il risultato finale allo stesso numero di cifre significative di quello dei dati del problema, tenendo presente comunque che, qualora i dati siano espressi con precisione diversa, il risultato finale non potrà essere più preciso del dato meno preciso.

9) Ricordare che per imparare a risolvere bene i problemi e necessario risolverne tanti: la risoluzione dei problemi spesso richiede creatività, ma qualche volta (spesso) si riuscirà a risolvere un problema prendendo lo spunto dal percorso risolutivo di problemi analoghi già svolti.

10) Se infine non si riesce ad “imbroccare” la strada giusta: consultare un qualche testo di esercizi svolti (come quello che avete tra le mani!).

Consigli pratici su come affrontare i problemi di fisica

Non considerare mai lo studio come un dovere, ma come un'occasione invidiabile di imparare l'effetto liberatorio della bellezza spirituale, non solo per il vostro proprio godimento, ma per il bene della comunità alla quale appartiene la vostra opera futura."

A. Einstein

(tratto dalla *rivista delle matricole* di Princeton, 1933)

La fisica è una scienza eminentemente sperimentale. Ciò significa che le varie ipotesi, leggi, teoremi, vanno sempre esaminati al vaglio della esperienza, e una qualunque proposizione non acquista significato se non nella misura in cui può essere usata per determinare e descrivere il comportamento di un reale sistema fisico.

Pertanto lo studio della fisica va sviluppato su un piano "applicativo", ed apprendere ad usare praticamente i concetti è altrettanto importante che impadronirsi teoricamente dei concetti stessi.

Da ciò deriva la notevole importanza che i problemi hanno per lo studio della fisica: essi, per così dire, rappresentano contemporaneamente un banco di prova e una guida alla reale e pratica utilizzazione di ciò che si è appreso.

In che cosa consiste un problema di fisica ed in che modo esso differisce da un problema, poniamo, di matematica?

Un problema di fisica (salvo quando non costituisca una semplice applicazione più o meno mnemonica di formule) deve sempre rappresentare una reale situazione, ossia deve prospettare lo svolgersi di eventi che realmente accadono o possono accadere.

Ora occorre sottolineare un punto fondamentale, che spesso viene dimenticato: le leggi della fisica non si riferiscono mai al mondo reale, ma hanno sempre per oggetto un universo ideale che, per di più, può essere diverso per leggi diverse.

Ciò deriva dal fatto che il mondo reale è troppo complicato per essere descritto e studiato in maniera completa e reale.

Si pensi, ad esempio, al semplicissimo fatto di lanciare per aria un sasso; che poi va a ricadere sul pavimento. Nella realtà sul sasso agiscono numerosi e non sempre ben definiti agenti: la forza di gravità, la resistenza dell'aria - che può' variare da istante a istante a seconda delle varie sezioni che il sasso, rivolvendosi nel suo moto, offre all'urto col mezzo; di più al momento dell'urto col suolo si avrà un parziale cedimento e del sasso e del pavimento. Onde d'urto di vario genere si propagheranno in entrambi, riflettendosi e interferendo fra loro, e così via. Impossibile analizzare quantitativamente un tale insieme di fatti.

Ora, il fisico sa, perché glielo insegna l'esperienza, che la maggior parte di questi avvenimenti hanno una importanza relativamente piccola nel quadro del fenomeno globale di "sasso lanciato che rimbalza". Egli dunque li trascurerà' e si limiterà a considerare solo gli elementi principali, quali la gravità, ed eventualmente la resistenza dell'aria, opportunamente schematizzata con una forza di tipo viscoso.

Per questi elementi esistono leggi precise, ed il problema potrà essere trattato e risolto: ma il problema ora non descrive più qualcosa di reale, ma descrive un oggetto ideale (corpo sferico rigido) che si muove in un ideale campo di forza ($g = cost$) attraverso un mezzo ideale, continuo e omogeneo ($f = 6\pi\eta r^2 v$). Se questa situazione ideale esistesse, la soluzione trovata la descriverebbe esattamente.

Per quanto riguarda la situazione reale, la soluzione la descriverà solo approssimativamente e l'approssimazione sarà tanto migliore quanto più il modello ideale che ci siamo costruiti somiglia alla realtà.

Dunque in un problema fisico la prima fase consisterà sempre nel sostituire alla situazione reale un modello ideale sul quale si sa lavorare.

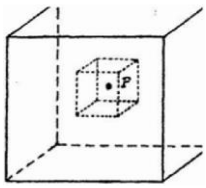
Più semplice il modello, più facile la soluzione; più complicato (in genere) il modello, più laboriosa la soluzione, ma più vicina alla descrizione reale dei fatti. Come sempre, occorrerà fare un compromesso fra la semplicità e la esattezza che si richiede. Questa prima fase è concettualmente la più importante per la più fisica, sebbene di solito essa sia evitata in quanto il problema (didatticamente parlando) fornisce direttamente il modello ideale.

La seconda fase consiste nello scrivere le leggi fisiche inerenti il modello e nel trattarle opportunamente con metodi matematici. Questa fase e essenzialmente tecnica e legata al calcolo. Occorre però tener presente, anche in questa fase, che le grandezze che si trattano sono grandezze fisiche, sia pure appartenenti ad un modello ideale, e non grandezze matematiche attratte: ciò può essere di grande aiuto, perché l'intuizione fisica ed il semplice buon senso possano suggerire facilmente la strada da seguire, o consentire di operare approssimazioni matematiche giustificate dalla valutazione fisica quantitativa dei parametri con cui si tratta. Per fare un esempio banale: se per una data massa risulta l'equazione $m^2 = 16$, il risultato matematico è $m = \pm 4$, mentre quello "fisico" è $m = 4$, risultando evidente che il risultato negativo $m = -4$ è senz'altro da scartarsi dato che m è una grandezza fisicamente definita positiva.

Connesso con questo tipo di ragionamento è il problema degli infinitesimi.

Senza addentrarci in discussioni matematiche, ricordiamo che con la notazione "dx" si intende una determinazione della grandezza x che tende a zero nel senso che può essere resa piccola a piacere. II carattere fondamentale dell'infinitesimo matematico sta proprio in questa potenziale diminuzione che può essere spinta fin dove occorra senza alcuna limitazione.

Quando però x rappresenta una grandezza fisica, in generale questa arbitrarietà non è più ammissibile. Un esempio diretto chiarirà meglio questo concetto. Si voglia determinare la "densità " ρ (P) di un oggetto, per esempio, un cubo non omogeneo di massa m e volume v, in prossimità di un punto P. Facendo semplicemente p= m/v si ottiene, come è ovvio, la densità' media. Si può allora considerare un cubo più piccolo, circostante P e siano m' e v' massa e volume di questo nuovo cubo.

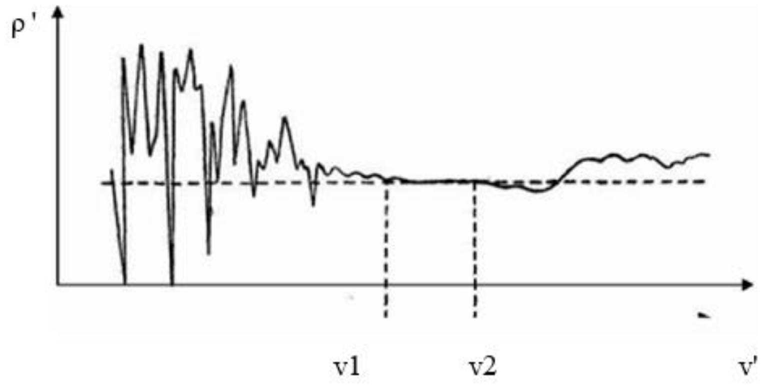


La nuova densità media $\rho' = m'/v'$; differirà, in generale, dalla precedente a causa della non omogeneità del corpo. Si pensi ora di far tendere a zero v', considerando cubetti sempre più piccoli intorno a P e si definisca densità locale $\rho(P)$ il limite del rapporto

$$\rho = \lim_{x' \to 0} \frac{dm}{dv}$$

Se la materia fosse continua, dv potrebbe avere l'ordinario significato di infinitesimo. In realtà a causa della struttura atomica della materia ciò non e' possibile.

Se pensiamo di riportare in un grafico il valore $\rho' = m'/v'$ in funzione di v' si otterrà una situazione qualitativamente indicata in figura.



All'inizio, per v' grande, ρ' flutterà a causa delle disomogeneità macroscopiche del corpo. Al diminuire di v' tali fluttuazioni si attenuano e ρ' sembrerà tendere ad un limite costante. Se però si pensa di ridurre ancora v' si comincia a "vedere" la discontinuità della materia e ρ' rappresenterà fluttuazioni che vanno crescendo al decrescere di v'. La ragione è semplice: mentre v' varia con continuità, m' varia in modo discontinuo, la minima variazione essendo rappresentata dalla massa di un singolo atomo. Finché in v' vi sono moltissimi atomi tale discontinuità non si manifesta, ma diviene sempre più sensibile al diminuire di v' Al limite ρ' diverrà zero se P non e' occupato da alcun atomo, mentre assumerà un valore estremamente elevato se in P' vi è un atomo (o più esattamente, il nucleo di un atomo in cui e' praticamente concentrata tutta la massa atomica).

Se in aggiunta si considera il fatto che gli atomi, soggetti all'agitazione termica, si muovono continuamente rispetto alla loro posizione di equilibrio, si avrà altresì una enorme fluttuazione temporale in ρ' qualora si considerino elementi di volume v' prossimi allo zero.

Si comprende quindi come in realtà dv non debba interpretarsi come un infinitesimo matematico, ma come un volumetto finito; abbastanza piccolo perché le fluttuazioni macroscopiche siano scomparse, ma abbastanza grande da contenere un numero enorme di atomi di modo che non appaiano ancora le fluttuazioni macroscopiche (nella figura dv dovrà essere compreso fra v_1 e v_2).

In genere ciò è possibile: in un gas, monoatomico ad esempio, vi sono ancora circa $3 \cdot 10^9$ atomi in un volume di 10^{-10} cm^3. Vi sono tuttavia situazioni in cui le fluttuazioni microscopiche appaiono prima che siano svanite quelle macroscopiche (come ad es. nel moto turbolento di un liquido) ed in questo caso non ha senso fisico parlare di infinitesimi.

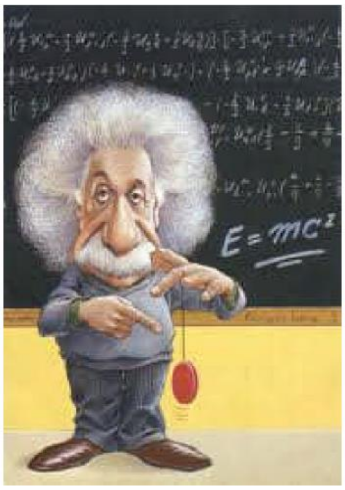
Riprendiamo ora il nostro discorso. Ottenuti i risultati subentra la terza fase: i risultati ottenuti sono certamente esatti (nei limiti di eventuali approssimazioni matematiche che si sono fatte) per quanto riguarda il modello.

Nel trasferirli al fatto fisico reale, va dunque considerato con quali cautele tale trasferimento può essere fatto, e specificare fino a quando i risultati esposti potranno considerarsi sufficientemente validi, il che è come dire fino a quando il modello scelto è ancora sufficiente a descrivere sia pure approssimativamente la realtà.

In generale un problema di fisica non può involvere solo un argomento, ed è semplicemente per comodità didattica che i problemi sono suddivisi per argomenti. Ciò impone di trattare questioni che nella maggior parte dei casi risulteranno eccessivamente schematizzate: è questo il prezzo che si deve pagare se non si vuoi avere a che fare con questioni fisiche troppo complesse.

E E' necessario richiamare, a volte, nozioni e teoremi matematici. Per altro non è possibile usare in questa sede il rigore matematico che sarebbe necessario ed utile.

(tratto dall'introduzione del testo: "*Guida alla soluzione di problemi di fisica*" di D.Sette e F.Wanderlingh - Ed. Veschi - 1988)



Un ultimo suggerimento: consiglio di usare questi esercizi svolti con atteggiamento “attivo" ed in modo “ragionato", capitolo dopo capitolo parallelamente allo studio del libro di testo. Se con i propri mezzi, dopo un tempo ragionevole, non si è giunti a un qualche risultato positivo si può senz'altro passare alla consultazione di questo testo. Questo non toglie nulla al proprio percorso formativo se non frustrazioni e perdite di tempo. In nessuna espressione della vita ci si può illudere di poter affrontare una prova impegnativa con qualche probabilità di successo, senza un adeguato addestramento pratico. Il tentativo di risolvere un problema di fisica non sfugge a questa regola: le prove scritte degli esami di fisica, in tutte le università, ne danno una dimostrazione inconfutabile.

Il riuscire ad “imbroccare” e poi eventualmente risolvere dettagliatamente un problema di fisica, (magari provando e riprovando, "rimurginandoci" sopra se occorre anche intere giornate) è una soddisfazione intellettuale che solo chi l’ha provato può capire.

Auguro a chi userà questi esercizi di provare tale gioia.

Alanno – giugno 2020

Indice

Si ringrazia il Prof. Giovanni Tonzig (autore di un sito molto stimolante per chi si occupa di didattica: www.giovannitonzig.it) per la gentile concessione alla riproduzione di alcuni suoi scritti.

Cap. 2

Misure ed unità di misura

2.1 Le masse atomiche date nella Tabella A-1 sono espresse in unità di massa atomica, abbreviata amu. Un amu è uguale a $1.66604 \cdot 10^{-27}$ kg**. Esprimere, in kilogrammi e in grammi, le masse di un atomo di a) idrogeno e b) ossigeno.**

Sappiamo che: massa di un atomo = peso atomico · amu (1 amu = $1.6604 \cdot 10^{-27}$ kg)

a) peso atomico H = 1.00797

massa di un atomo di H ≡ $m_H = 1.00797 \cdot 1.6604 \cdot 10^{-27} = 1.6736 \cdot 10^{-27}$ kg

b) peso atomico O = 15.9994

massa di un atomo di O ≡ $m_O = 15.9994 \cdot 1.6604 \cdot 10^{-27} = 26.5564 \cdot 10^{-27}$ kg

2.2 Quante molecole di acqua, ciascuna composta da un atomo di ossigeno e da due di idrogeno, vi sono in un grammo? e in 18 **grammi? e in un cm³?**

Per trovare la massa di una molecola di acqua basta conoscere il suo peso molecolare e moltiplicarlo per 1 amu; dopodiché il rapporto fra 1 g e la massa di una molecola di acqua ci dà il numero richiesto.

p.m. $_{H2O} = 2 \cdot 1.00797 + 15.9994 = 18.0153$

Allora la massa di una molecola di acqua sarà:

$m_{H2O} = 18.0153 \cdot 1.66 \cdot 10^{-21} = 29.91 \cdot 10^{-21}$ kg $= 29.91 \cdot 10^{-24}$ g

numero di molecole contenute in un grammo = 1 (g) /(massa (g) di una molecola)

$$N = \frac{m}{m_{H2O}} = \frac{1(g)}{29.91 \cdot 10^{-24}\, g} = 3.34 \cdot 10^{22}\, molecole$$

Se la massa di acqua presa in considerazione è di 18 g il numero di molecole sarà:

$$N = \frac{m}{m_{H2O}} = \frac{18(g)}{29.91 \cdot 10^{-24}\, g} = 60.18 \cdot 10^{22}\, molecole = 6.02 \cdot 10^{23}\, molecole \equiv N_A$$

Oppure più semplicemente una volta noto il numero di molecole in un grammo per sapere il numero di molecole in 18 g basta moltiplicare per 18.

Siccome la densità dell'acqua a 4° C è pari a 1.000 g/cm³ (vedi Tab. A-6) il numero di molecole di acqua presenti in un grammo è lo stesso numero presente in un cm³.

Notiamo che il numero di molecole presenti nella massa numericamente pari al peso molecolare espresso in grammi è per definizione il Numero di Avogadro ($N_A = 6.02 \cdot 10^{-23}$).

2.3 Poiché il kilogrammo potrebbe essere definito come la massa di $5.0188\cdot10^{25}$ **atomi dell'isotopo** ^{12}C**, la cui massa è definita esattamente come** 12.0000 amu**, verificare che questa definizione è in accordo col valore dell'amu dato nel Prob. 2.1.**

Dalla definizione data 1 kg = $5.0188\cdot10^{25}\cdot12$ amu

discende che 1 amu = $1.6604\cdot10^{-27}$ kg

verificando così l'uguaglianza.

2.4 Si considerino le molecole dell'idrogeno e dell'azoto, ciascuna composta da due atomi identici. Si calcolino i numeri di molecole di ciascuno di questi gas contenute in un m³ (in condizioni normali). Si faccia uso delle densità relative (all'acqua) date nella Tab. A-6. Si estenda il calcolo ad altri gas. Quali conclusioni generali si possono trarre?

Calcoliamo le masse delle singole molecole:

$m_{H2} = 2\cdot1.6736\cdot10^{-27} = 3.3472\cdot10^{-27}$ kg

$m_{O2} = 2\cdot26.5654\cdot10^{-27} = 5.3131\cdot10^{-26}$ kg

$m_{N2} = 2\cdot14.0067\cdot1.6604\cdot10^{-27}$ kg $= 4.6513\cdot10^{-26}$ kg

Il numero delle molecole delle varie sostanze contenute nel volume di un metro cubo sarà (ricordando che $\rho = \frac{m}{V}$: $m = \rho V$):

$$N_{H2/m^3} = \frac{\rho V}{m_{H2}} = \frac{\rho(1m^3)}{m_{H2}} = \frac{8.9888\cdot10^{-2}\,kg/m^3}{3.3472\cdot10^{-27}\,kg} = 2.6852\cdot10^{25}\,molecole/m^3$$

$$N_{O2/m^3} = \frac{\rho V}{m_{H2}} = \frac{\rho(1m^3)}{m_{O2}} = \frac{1.42904kg/m^3}{5.3131\cdot10^{-26}\,kg} = 2.6897\cdot10^{25}\,molecole/m^3$$

$$N_{N2/m^3} = \frac{\rho V}{m_{N2}} = \frac{\rho(1m^3)}{m_{N2}} = \frac{1.25055\,kg/m^3}{4.6513\cdot10^{-26}\,kg} = 2.68886\cdot10^{25}\,molecole/m^3$$

La conclusione che si trae e che come aveva detto il buon Avogadro nel 1811: uguali volumi di gas, alle stesse condizioni di temperatura e pressione, contengono lo stesso numero di molecole.

Approfondimento

La mole (ex grammo mole), simbolo mol, è l'unità di misura della quantità di sostanza. È una delle sette unità di misura fondamentali del Sistema internazionale.

A partire dal 20 maggio 2019, la mole è definita come la quantità di sostanza che contiene esattamente 6,02214076 × 10^{23} entità fondamentali, essendo questo il valore numerico della costante di Avogadro quando espressa in mol^{-1} (numero di Avogadro).

Tale definizione è stata introdotta nel novembre 2018 nel corso della 26° Conférence générale des poids et mesures, sostituendo la vecchia definizione basata sul numero di atomi contenuti in 12 grammi di ^{12}C, (ossia l'isotopo del carbonio con numero di massa 12). In effetti, la ridefinizione della mole è stata decisa per rendere le unità di misura indipendenti tra di loro (prima la definizione di mole era legata alla massa) e perché allo stato attuale delle cose è possibile determinare il valore numerico della costante di Avogadro con un livello di incertezza accettabile.

Il numero di particelle contenute in una mole è noto come numero di Avogadro, dal chimico e fisico italiano Amedeo Avogadro.

Accenniamo qui anche alla conseguenza della legge di Avogadro e che cioè una mole di sostanza occupa sempre il volume di 22.4 litri, infatti dalle formule sopra utilizzate per il calcolo delle molecole presenti un metro cubo, esplicitandole in funzione di V (con $N = N_A$), si ha:

$$V_{H2} = \frac{N_A m_{H2}}{\rho} = \frac{6.022 \cdot 10^{23} \cdot 3.3472 \cdot 10^{-27}}{8.988 \cdot 10^{-2}} = 22.4 \ L$$

$$V_{O2} = \frac{N_A m_{O2}}{\rho} = \frac{6.022 \cdot 10^{23} \cdot 5.3131 \cdot 10^{-26}}{1.42904} = 22.4 \ L$$

$$V_{N2} = \frac{N_A m_{N2}}{\rho} = \frac{6.022 \cdot 10^{23} \cdot 4.6513 \cdot 10^{-26}}{1.25055} = 22.4 \ L$$

Tale volume viene detto volume molare standard, standard perché ci si riferisce alle condizioni di STP (0°C e 1 atm).

<u>Quindi nel volume di 22.4 l di qualsivoglia sostanza gassosa ideale ci sono sempre N_A particelle</u>.

2.5 Supponendo che l'aria sia composta da un 20% di ossigeno e un 80% di azoto e che questi gas abbiano molecole biatomiche, si calcoli la massa molecolare "efficace" dell'aria. Si calcoli il numero di molecole in un cm^3 di aria in condizioni normali. Si dica anche quante di queste molecole sono di ossigeno e quante di azoto?

$m_{aria} = 0.2 \cdot 2 \cdot 15.994 + 0.8 \cdot 2 \cdot 14.0067 = 28.8105$ amu $= 4.7837 \cdot 10^{-26}$ kg

Sapendo che la densità relativa dell'aria è di $1.2922 \cdot 10^{-3}$ g/cm^3 si ottiene:

$$N_{molidiaria/cm3} = \frac{1.2922 \cdot 10^{-3} \; g/cm^3}{4.7837 \cdot 10^{-23} \;\; g} = 0.2701 \cdot 10^{20}$$

Il numero di molecole si ossigeno e azoto è allora:

$N_{O/cm3} = 0.2 \cdot 0.2701 \cdot 10^{20} = 5.4 \cdot 10^{18}$ molecole/cm^3

$N_{N/cm3} = 0.8 \cdot 0.2701 \cdot 10^{20} = 2.2 \cdot 10^{19}$ molecole/cm^3

Curiosità (un bicchiere di coca cola versato nel mare…)

Facciamo la seguente operazione ideale; versiamo un bicchiere di coca cola nel mare e agitiamo bene il tutto, ossia mescoliamo bene le acque di tutti i mari della Terra, in modo da avere una dispersione omogenea della nostra bevanda: ora ci si può chiedere se raccogliendo un bicchiere dell'acqua dal mare (in un punto qualsiasi) per caso in esso ci siano delle molecole della nostra coca cola. La risposta è sorprendentemente affermativa. Vediamo perché.

Stimiamo il volume di un bicchiere pari a 0.10 L e il volume di tutti i mari in $1.3 \cdot 10^9$ km^3

Supponiamo ora, senza fare un grande errore, che la densità della coca cola sia pari a quella dell'acqua, allora dal prob. 2.2 sappiamo che in un grammo di acqua ci sono $3.34 \cdot 10^{22}$ molecole,

e quindi in un bicchiere (massa pari a 0.1 kg = 100 g) ci saranno $3.34 \cdot 10^{24}$ molecole.

Ora chiediamoci quanti bicchieri di acqua contiene il volume di tutti i mari della Terra:

$V_{tutti\ i\ mari} / V_{bicchiere} = 1.3 \cdot 10^9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-3}$ L / 0.1 L $= 1.3 \cdot 10^{22} \equiv$ n° di bicchieri contenuti nei mari,

cosicché risulta che il numero di molecole di coca cola iniziale è 100 volte il numero dei bicchieri contenuti nei mari, ciò significa, che sotto le nostre ipotesi di dispersione omogenea, raccogliendo a caso un bicchiere di acqua dal mare ci saranno (mediamente) 100 molecole di coca cola!

2.6 La densità del gas interstellare nella nostra galassia è valutata essere circa 10^{-21} kg/m^3**. Supponendo che il gas sia principalmente idrogeno, valutare il numero di atomi di idrogeno per cm^3. Confrontare il risultato con l'aria in condizioni normali di cui al Prob. 2.5.**

$\rho_{galassia} = \rho_H = 10^{-21}$ kg/m^3; p.a. (H) = 1.00797; $m_H = 1.6736 \cdot 10^{-27}$ kg

Dal prob. 2.4 sappiamo che

$$N_{H/m^3} = \frac{\rho(1m^3)}{m_{H2}} = \frac{10^{-21}\, kg/m^3}{1.6736 \cdot 10^{-27}\, kg} = 0.5975 \cdot 10^6 \ \ atomi/m^3 \approx 6\, atomi/cm^3$$

Approfondimento

È utile avere presente la seguente tabella delle densità molecolari

In 1 g di un gas $\approx$ 10^{19} molecole/cm^3
In 1 g di un liquido $\approx$ 10^{22} molecole/cm^3
In 1 g di un solido $\approx$ 10^{25} molecole/cm^3

Come si vede da uno stato di aggregazione fisico all'altro c'è un fattore di circa mille.

2.7 Un bicchiere pieno di acqua ha raggio 2 cm. In due ore il livello dell'acqua scende di un millimetro. Calcolare, in grammi/ora, la velocità di evaporazione dell'acqua. Quante molecole d'acqua evaporano in un secondo da ogni cm^3 di superficie? (Suggeriamo allo studente di eseguire questo esperimento e ricavare dei dati propri. Perché si ottengono risultati diversi nei diversi giorni dell'anno?).

La superficie libera dell'acqua nel bicchiere è $S = \pi r^2 = 12.566$ cm^2,

il volume evaporato in un'ora è

$V_h = ½\, S\, h = ½\, 12.566 \cdot 0.1 = 0.6283$ cm^3

poiché la densità dell'acqua è 1 g/cm^3 la velocità di evaporazione è:

$v_{ev} = 0.6283$ g/h $= 1.7453 \cdot 10^{-4}$ g/s

Dal prob. 2.2 sappiamo che in un grammo di acqua ci sono $3.34 \cdot 10^{22}$ molecole, dunque la velocità di evaporazione, dalla superficie S, espressa in termini di numero di molecole al secondo sarà:

$v_{ev} = 1.7453 \cdot 10^{-4} \cdot 3.34 \cdot 10^{22} = 5.83 \cdot 10^{18}$ molecole/s

Per sapere quante molecole evaporano in un cm^2 basta dividere per S:

$v_{ev}/S = 5.83 \cdot 10^{18}/12.566 = 4.64 \cdot 10^{17}$ molecole/cm^2 s

2.8 Una mole di sostanza è definita come quella quantità, in grammi, numericamente uguale alla massa molecolare espressa in amu. (Quando ci si riferisce a un elemento chimico anziché ad un composto usiamo la massa atomica). Verificare che il numero di molecole (o di atomi) contenute in una mole di qualsiasi sostanza è lo stesso ed è uguale a $6.0225 \cdot 10^{23}$**. Questo numero, chiamato numero di Avogadro, è una importantissima costante fisica.**

Supponiamo di voler calcolare il numero di molecole contenute in una mole di H_2.

Una mole di H_2 è pari a 2.0159 g, poiché la massa molecolare dell'idrogeno molecolare è

massa di 1 mole di $m_{H2} = 2 \cdot 1.00797$ amu = 2.0159 amu = 2.0159 g

La massa di una molecola è:

$m_{H2} = 2 \cdot 1.00797 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} = 3.347 \cdot 10^{-24}$ g

Per sapere quante molecole ci sono basta dividere la massa di una mole per la massa di una singola molecola

$N = 2.0159 / 3.347 \cdot 10^{-24} = 6.0226 \cdot 10^{-23}$ molecole

abbiamo così verificato che tale valore coincide con il numero di Avogadro.

2.9 Usando i dati delle Tab. A-6 e A-1 si calcoli la distanza media tra le molecole nell'idrogeno (in condizioni normali), nell'acqua (liquido) e nel ferro (solido).

Conoscendo le densità delle tre sostanze ed la loro massa (ex "peso atomico"), possiamo formulare la seguente tabella per i due modelli indicativi di come è disposta la materia a livello molecolare, e cioè il modello cubico e sferico:

a) modello cubico:

   ogni molecola si muove avendo a disposizione il volume di un cubo di lato $L = V^{1/3}$

Il volume si calcola dalla relazione $\rho = m/V$: $V = m / \rho$

b) modello sferico:

   ogni molecola si muove avendo a disposizione una sfera di raggio $r = (3V/4\pi)^{1/3}$

	m (amu)	m (g)	ρ (g/cm³)	V = m/ρ (m³)	L (Å) – cubico -	r (Å) – sferico -
H_2	2.016	$3.347 \cdot 10^{-24}$	$8.988 \cdot 10^{-5}$	$37.24 \cdot 10^{-27}$	33	21
H_2O	18.015	$29.913 \cdot 10^{-24}$	1	$29.91 \cdot 10^{-30}$	3	19
Fe	55.847	$92.728 \cdot 10^{-24}$	7.86	$11.79 \cdot 10^{-30}$	2	1

2.10 La massa di un atomo è praticamente tutta nel suo nucleo. Il raggio di un nucleo di uranio è $8.68 \cdot 10^{-15}$ m. Usando la massa atomica dell'uranio data nella Tab. A-1, si valuti la densità della "materia nucleare". Questo nucleo contiene 238 particelle o "nucleoni". Si calcoli la distanza media tra i nucleoni. Dal punto di vista del vostro risultato potete concludere che è ragionevole trattare la materia nucleare allo stesso modo della materia in quanto aggregato di atomi e molecole?

Usando i dati della tab.1 si ha:

$$\rho_U = \frac{m_U}{V_U} = \frac{238.03 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}\,kg}{\frac{4}{3}\pi(8.68 \cdot 10^{-15})^3 m^3} = \frac{395.13 \cdot 10^{-27}\,kg}{2737.96 \cdot 10^{-45}\,m^3} 1.44 \cdot 10^{17}\,kg/m^3$$

Si noti il valore grandissimo di questa densità, essa è circa 10^{14} volte quella dell'acqua.

Supponendo che ad ogni nucleone presente nel nucleo dell'uranio competa un volume Vn pari a

$V_n = V_U / 238 = 11.5 \cdot 10^{-45}\ m^3$

il raggio di ogni nucleone è:

$$r_n = \sqrt{\frac{3V_n}{4\pi}} = 1.4 \cdot 10^{-15}\,m = 1.4\,fm$$

2.11 Usando i dati della Tab. A-7, calcolare la densità media della Terra e del Sole. Confrontando questo valori con i dati della Tab. A-6 cosa potreste concludere sulla struttura di questi corpi?

Usando i dati della tab. 13.1 è banale calcolare le densità del sole e della Terra.

$$\rho_S = \frac{m_S}{V_S} = \frac{m_S}{(4/3)\pi r^3} = 1.98 \cdot \frac{1.98 \cdot 10^{30}}{(4/3)\pi(6.96 \cdot 10^8)^3} = 1.40 \cdot 10^3\,kg/m^3$$

$$\rho_T = \frac{m_T}{V_T} = \frac{m_S}{(4/3)\pi r^3} = \cdot \frac{5.98 \cdot 10^{24}}{(4/3)\pi(6.37 \cdot 10^6)^3} = 5.52 \cdot 10^3\,kg/m^3$$

Da cui si vede che la densità della Terra è circa 4 volte quella del sole, come era intuivo fosse, in quanto il sole è una stella quindi sostanzialmente è una "palla di gas", mentre la Terra è una "palla rocciosa", inoltre possiamo osservare che siccome le distanze atomiche aumentano con l'aumentare della temperatura, gli atomi presenti nel sole sono più distanti di quelli presenti sulla Terra.

2.12 Stimare la densità media dell'universo. Supponendo che tutti gli atomi siano distribuiti uniformemente nell'intero universo quanti atomi ci sarebbero in un cm^3? Si supponga che tutti gli atomi siano di idrogeno.

Per rispondere alla domanda del problema occorre fare delle ipotesi sui numeri da usare, ossia sul valore del numero di atomi presenti nell'intero universo e del valore del suo raggio.

Il primo uomo a stimare il numero degli atomi dell'universo pare sia stato Sir Artur Eddington.

Si potrebbe fare un ragionamento di questo tipo:

N° $_{\text{atomi universo}}$ = N° di atomi di una stella "media" x N° si stelle presenti in una galassia "media" x N° di galassie presenti nell'universo

con le seguenti approssimazioni:

1) non esiste gas interstellare

2) la massa di corpi non stellari è trascurabile

3) le stelle sono fatte interamente di idrogeno (al massimo qui occorre un fattore di correzione, ma l'ordine di grandezza non cambia)

N° di atomi di una stella "media" $= M_S / m_H = 10^{31} / 1.66 \cdot 10^{-27} = 6 \cdot 10^{57}$ atomi

Il numero di stelle presenti una galassia media viene attualmente (2020) stimato in circa 200 miliardi di stelle, mentre il numero di galassie viene stimato in circa 100 miliardi di galassie, dunque la nostra stima diventa:

N° $_{\text{atomi universo}} = 6 \cdot 10^{57} \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 100 \cdot 10^9 \approx 10^{80}$

Per quanto riguarda la "grandezza" dell'universo le ultime stime dicono che il raggio della sfera dell'universo osservabile è di circa 46 miliardi di anni luce, dunque il suo raggio stimato è

$r_{\text{universo}} = 46 \cdot 10^9 \cdot 9.461 \cdot 10^{15} \approx 10^{26}$ m (essendo 1 a.l. $= 9.46 \cdot 10^{15}$ m $\approx 10^{13}$ km)

La densità risulta

$$\rho_{universo} = \frac{M_{universo}}{V_{universo}} = \frac{m_H n°(atomi\ \ dell'universo)}{(4/3)\pi r^3} = \frac{1.09 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{80}}{(4/3)\pi (10^{26})^3} = 4 \cdot 10^{29}\ g/cm^3$$

Ed infine la stima grossolana del numero di atomi di idrogeno per cm^3 sarebbe:

N°$_{\text{atomi H/cm3}} = \rho/m_H = 4 \cdot 10^{29} / 1.67 \cdot 10^{-27} \approx 10^{-5}$ atomi/cm^3

Una densità veramente bassa!

Quadro sinottico del "vuoto":

Nell'aria a pressione atmosferica ci sono circa $3 \cdot 10^{19}$ molecole/cm^3
• Nel "vuoto" che si riesce a ottenere in laboratorio ci sono circa 10^9 molecole/cm^3
• Nel mezzo interstellare della Via Lattea c'è mediamente 1 atomo di idrogeno per cm^3
• Nelle fasi meno dense (più calde) del mezzo interstellare ci sono circa 10^{-3} atomi/cm^3

2.13 La velocità della luce nel vuoto è di $2.9979 \cdot 10^8$ m/s**. esprimerla in miglia per ora. Per quante volte in un secondo un raggio di luce potrebbe girare intorno alla Terra? (Per i dati sulla Terra si faccia uso della Tab.A-7). Quale distanza potrebbe percorrere in un anno? Tale distanza è chiamata *anno luce*.**

Sapendo che 1 miglio = 1609 m, e che 1 h = 3600 s si ha:

$$v = \frac{2.9979 \cdot 10^8 \cdot 3.6 \cdot 10^3}{1.609 \cdot 10^3} = 6.71 \cdot 10^8 \; mi/h$$

Poiché il raggio della Terra è $R_T = 6.37 \cdot 10^6$ m il tempo impiegato dalla luce per percorrere un giro della Terra è:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi R_T}{v} = \frac{4 \cdot 10^7}{2.9979 \cdot 10^8} = 0.13 s$$

Quindi in un secondo la luce compie circa 1/0.13= 7.5 giri intorno alla Terra.

Sapendo che in un anno ci sono $3.156 \cdot 10^7$ s, possiamo calcolare lo spazio percorso dalla luce in anno (anno luce), avendosi:

$s \equiv 1$ a.l. = $vt = 2.9979 \cdot 10^8 \; 3.156 \cdot 10^7 = 9.46 \cdot 10^{15}$ m $\approx 10^{13}$ km

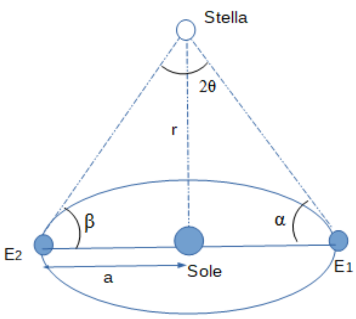
2.14 Il raggio dell'orbita terrestre è $1.49 \cdot 10^{11}$ m**. Questa lunghezza è chiamata *unità astronomica*. Esprimere un anno luce in unità astronomiche (vedasi Prob. 2.13).**

Essendo una unità astronomica pari al raggio orbitale (medio) terrestre ($1.49 \cdot 10^{11}$ m),

in numero di unità astronomiche l'anno luce è:

1 a.l. / $R_{orbita\ terrestre} = 9.46 \cdot 10^{15} / (1.49 \cdot 10^{11}) = 6.3 \cdot 10^4$ u.a.

2.15 Parallasse è la differenza nella direzione apparente di un oggetto, dovuta a una variazione di posizione dell'osservatore. (Tenete una matita davanti a voi e chiudete prima l'occhio destro e poi il sinistro. Si noti che in entrambi i casi la matita appare con uno sfondo differente). La parallasse stellare è la variazione nella posizione apparente di una stella dovuta al moto orbitale della Terra attorno al sole. Essa viene espressa quantitativamente dal semiangolo sotteso dal diametro terrestre E_1E_2 perpendicolarmente alla congiungente stella-sole (vedi figura seguente). Esso è dato da $\theta = \frac{1}{2}(180° - \alpha - \beta)$, **dove gli angoli α e β sono misurati nelle due posizioni E_1 e E_2 distanti 6 mesi. La distanza r della stella dal sole può essere ottenuta da** $a = r\,\theta$, **dove *a* è il raggio dell'orbita terrestre e θ è misurato in radianti. La stella col massimo parallasse si** 0.76'' **(cioè la stella più vicina) è α-Centauri. Si calcoli la sua distanza dal sole espressa in metri, in anni luce e in unità astronomiche.**



Considerando la relazione proposta dal testo del problema a = r θ la distanza della stella

α-centauri dal sole è:

$r = a / \theta(\text{rad}) = 1.49 \cdot 10^{11} / 0.76'' = 1.49 \cdot 10^{11} / (3.68 \cdot 10^{-6} \text{ rad}) = 4.04 \cdot 10^{16}$ m

esprimendo r in a.l. ed in u.a. si ha:

$r = 4.04 \cdot 10^{16} / 9.45 \cdot 10^{15} = 4.28$ a.l.

$r = 4.04 \cdot 10^{16} / 1.49 \cdot 10^{11} = 2.71 \cdot 10^{5}$ u.a.

2.16 Un Parsec è la distanza dal sole di una stella il cui parallasse è di 1''. **Si esprima il parsec in metri, in anni luce e in unità astronomiche. esprimere la distanza in parsec in funzione del parallasse in secondi d'arco.**

Dalla definizione di parsec data si ha:

$1 \text{ parsec} = a / 1'' = 1.49 \cdot 10^{11} \text{ (m)} / 4.85 \cdot 10^{-6} \text{ (rad)} = 0.307 \cdot 10^{17}$ m

esprimendo la distanza di un parsec in a.l. ed in u.a. si ha:

$1 \text{ parsec} = 0.307 \cdot 10^{17} / (9.45 \cdot 10^{15}) = 3.26$ a.l.

$1 \text{ parsec} = 0.307 \cdot 10^{17} / (1.49 \cdot 10^{11}) = 2.06 \cdot 10^{5}$ u.a.

2.17 La distanza tra San Francisco e New York, misurata lungo un grande cerchio che passa per queste due città è di 2571 mi**. Calcolare l'angolo tra le verticali per queste due città.**

Dalla relazione $r = a / \theta(rad)$

con a = distanza in metri sull'arco di cerchio ed r = raggio della Terra si ha:

$\theta° = \theta(rad) \cdot (180/\pi) = (a / r)\,(180/\pi) = 2571 \cdot 1609 \cdot 180\ m /(\pi\ 6.37 \cdot 10^6\ m) = 37°\ 13'$

2.18 Calcolare l'angolo sotteso dal diametro della grande nebulosa M-31 quando viene osservata dalla Terra. esprimerlo in radianti e in gradi. Trovare anche l'angolo solido sotteso dalla nebulosa. (Distanza dal sole $d = 2.5 \cdot 10^{22}$ m**, diametro** $D = 10^{21}$ m**).**

Dalla relazione $r = a / \theta(rad)$ dove a questa volta è il raggio di M-31 ed r è la sua distanza dal sistema solare si ottiene:

$\theta(rad) = a / r = 0.5 \cdot 10^{21} / (2.5 \cdot 10^{22}) = 0.02\ rad = 1°\ 9'$

Dalla relazione che definisce l'angolo solido si ha:

$\Omega = \pi a^2 / r^2 = \pi\,(0.5 \cdot 10^{21})^2 / (2.5 \cdot 10^{22})^2 = 1.26 \cdot 10^{-3}$ sterad

2.19 Osservando la Tabella delle funzioni trigonometriche, calcolare l'angolo per il quale sin θ e tan θ differiscono del (a) 10% (b) 1% (c) 0.1%. Fare lo stesso calcolo per sin θ e θ , e per tan θ e θ, dove θ è espresso in radianti. Quali conclusioni si possono trarre da questi risultati?

Dalla tabella delle funzioni trigonometriche si vede che per l' angolo di 26° si ha

$\sin 26° = 0.438$ e $\tan 26° = 0.488$ la loro differenza vale: $\tan 26° - \sin 26° = 0.05$

avendosi che 10% 0.438 = 0.04 ≈ 0.05 possiamo concludere che la differenza del dieci per cento fra il valore del seno e della tangente si ha per un angolo di circa 26°.

Lo stesso accade per i valori di 45° e 30°.

Possiamo allora fare la seguente tabellina:

	Δ(10%) $|\sin\theta - \tan\theta|$	Δ(10%) $|\sin\theta - \theta|$	Δ(10%) $|\tan\theta - \theta|$
θ	26°	45°	30°

	Δ(1%) $|\sin\theta - \tan\theta|$	Δ(1%) $|\sin\theta - \theta|$	Δ(1%) $|\tan\theta - \theta|$
θ	10°	15°	9.8°

	Δ(0.1%) $|\sin\theta - \tan\theta|$	Δ(01%) $|\sin\theta - \theta|$	Δ(01%) $|\tan\theta - \theta|$
θ	4°	5.4°	3.2°

Dall’analisi dei risultati possiamo inferire che la differenza fra i valori del seno e della tangente di un angolo tendono a zero con il tendere a zero dell’angolo, per cui per valori piccoli di θ i due valori possono confondersi, ad esempio se per un dato calcolo ci possiamo accontentare della precisione dell’1% possiamo confondere i valori del seno e della tangente con i valori dell’angolo stesso per $\theta < 15°$.

2.20 Sono dati i tre numeri a = 49238.42; b = $6.382 \cdot 10^4$; c = 86.545. **(a) Sommare i numeri. (b) Moltiplicarli tutti e tre. (c) Sommare i primi due e moltiplicare il risultato per il terzo. (d) Moltiplicare gli ultimi due e dividere il risultato per il primo. Si diano tutte le risposte con l'opportuno numero di cifre significative**.

Richiamo sugli errori di misura, (la stanghetta sopra il simbolo indica il suo valor medio, mentre il simbolo delta indica l'incertezza).

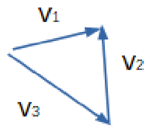
Grandezza	Valore più plausibile	Errore assoluto
c = a + b	$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$	$\Delta c = \Delta a + \Delta b$
c = a – b	$\bar{a} - \bar{b}$	$\Delta c = \Delta a + \Delta b$
c = a b	$\bar{a}\,\bar{b}$	$\Delta c = \bar{b}\,\Delta a + \bar{a}\,\Delta b$
c = a / b	$\bar{a} / \bar{b}$	$\Delta c = \dfrac{\bar{a}}{\bar{b}}\left(\dfrac{\Delta a}{a} + \dfrac{\Delta b}{b}\right)$

Δa indica l'errore assoluto della grandezza "*a*", mentre $\Delta a/a$ rappresenta l'errore relativo (l'errore percentuale è semplicemente l'errore relativo moltiplicato per 100).

Per risolvere problema richiamiamo i concetti base della *matematica delle grandezze fisiche*. poiché è ovvio che il problema si riferisce a numeri che esprimono certe grandezze fisiche (non specificate). Iniziamo con l'osservare che in fisica, tutte le grandezze non sono note in maniera esatta, come accade in matematica, ma sono conosciute a meno di un errore sperimentale. Per questa ragione è necessario porre una particolare attenzione al modo in cui si scrivono i risultati di un esperimento o nel modo in cui scrivere le operazioni fra numeri che esprimo grandezze fisiche, che quindi si "portano addosso" un errore. Assumiamo che sempre, dove non specificato, tale errore sia da individuarsi nell'ultima cifra significativa. Così ad esempio rispetto al numero 3.665 m l'errore è 1 mm quindi va trattato come se fosse scritto 3.665 ± 0.001 m. Ricordiamo la definizione di cifre significative: il numero delle cifre significative di una misura è pari al numero delle cifre certe più la cifra incerta. Così se abbiamo un valore di 2.0 il numero delle cifre significative è 2 (2 è la cifra certa mentre lo 0 è la cifra incerta), mentre il valore 20.56 ha quattro cifre significative (3 certe e una incerta). Osserviamo che mentre gli zeri a destra della virgola contano nel calcolo delle cifre significative, quelli a sinistra non contano. Per esempio il numero 0.0038 non ha 5 cifre significative bensì solo 2 (3 è certa e 8 è incerta). Per questo è molto utile usare al

3.26 Dimostrare che se $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{V}_3$ hanno per somma zero, allora $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_1$. Da tali relazioni dedurre che $V_1/\sin \Delta(V_2V_3) = V_2/ \sin \Delta(V_3V_1) = V_3/ \sin \Delta(V_1V_2)$ dove il simbolo Δ indica l'angolo fra i due vettori.

Bisogna provare che se $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = 0$ allora $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_1$



Scriviamo le componenti nel seguente modo

$\mathbf{V}_1 = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,k$

$\mathbf{V}_2 = d\,\mathbf{i} + e\,\mathbf{j} + f\,k$

$\mathbf{V}_3 = g\,\mathbf{i} + h\,\mathbf{j} + l\,k$

Dalla ipotesi si deve avere

$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = (a + d + g)\,\mathbf{i} + (b + e + h)\,\mathbf{j} + (c + f + l)\,\mathbf{k} = 0$ ciò implica

$(a + d + g) = 0$

$(b + e + h) = 0$ (1)

$(c + f + l) = 0$

Calcoliamo i prodotti vettoriali:

$\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_3 = (bl - ch)\,\mathbf{i} + (cg - al)\,\mathbf{j} + (ah - bg)\,\mathbf{k}$

$\mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_2 = (hf - le)\,\mathbf{i} + (ld - gf)\,\mathbf{j} + (ge - hd)\,\mathbf{k}$

$\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_1 =(hf - le)\mathbf{i} + (fa - dc)\,\mathbf{j} + (db - ea)\,\mathbf{k}$

Dobbiamo far vedere che sfruttando il sistema (1) si ha

$(bl - ch) = (hf - le) = (hf - le)$

$(cg - al) = (ld - gf) = (fa - dc)$

$(ah - bg) = (ge - hd) = (db - ea)$

ed infatti dal sistema discende, ad esempio dividendo la terza eq. per la seconda, che

$l/h = (g+ c) / (b + e)$

che verifica la prima uguaglianza dei prodotti vettoriali, similmente si ragiona per le altre componenti.

Una volta provata la tesi è ovvio per definizione stessa di prodotto vettoriale, essendo ad es.

$|\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_3| = V_1 V_2 \sin\alpha = |\mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_2| = V_3 V_2 \sin\beta = |\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_1| = V_2 V_1 \sin\gamma$ si abbia

$V_1 / \sin\beta = V_3 / \sin\alpha = V_3 / \sin\gamma$

3.27 Dimostrare che se due vettori hanno lo stesso modulo V e formano un angolo θ, la loro somma ha modulo $S = 2V \cos \frac{1}{2}\theta$ **e la loro differenza vale** $D = 2V \sin \frac{1}{2}\theta$.

Se $|\mathbf{V}_1| = |\mathbf{V}_2| = V$ allora $S = 2V \cos \theta/2$ e $D = 2V \sin \theta/2$

Basta applicare le formule di S e D:

$S = (V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2 \cos \theta)^{1/2} = (2V^2 + 2V^2 \cos \theta)^{1/2} = V(2+2\cos \theta)^{1/2} = 2V\cos \theta/2$

essendo $(1+\cos \theta)/2 = \cos^2 \theta/2$

Per la differenza abbiamo che

$D = (V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2 \cos \theta)^{1/2} = V\,(2 - 2\cos \theta)^{1/2} = 2V \sin \theta/2$

essendo $(1 - \cos \theta)/2 = \sin^2 \theta/2$

3.28 Usando le componenti di $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ espresse in forma sferica, dimostrare che l'angolo formato dai vettori è dato da $\cos \theta_{1,2} = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2$, **dove** $\theta_{1,2}$ **è l'angolo tra i due vettori. Questo risultato è usato moltissimo nei calcoli astronomici. Si utilizzi questo risultato per ricavare l'angolo tra le verticali di San Francisco (latitudine:** 37° 45' N**; longitudine:** 122° 27' O**) e di New York (latitudine:** 40° 40' N**; longitudine:** 73° 50' O**). Confrontare la risposta con quella data nel Prob. 2.17.**

Come noto i vettori espressi in coordinate cartesiane

$\mathbf{V}_1 = V_{1,x}\,\mathbf{i} + V_{1,y}\,\mathbf{j} + V_{1,z}\,\mathbf{k}$

$\mathbf{V}_2 = V_{1,x}\,\mathbf{i} + V_{1,y}\,\mathbf{j} + V_{1,z}\,\mathbf{k}$

in coordinate sferiche diventano

$\mathbf{V}_1 = V_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_1\,\mathbf{i} + V_1 \sin \theta_1 \sin \varphi_1\,\mathbf{j} + V_1 \cos \theta_1\,\mathbf{k}$

$\mathbf{V}_2 = V_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2\,\mathbf{i} + V_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2\,\mathbf{j} + V_2 \cos \theta_2\,\mathbf{k}$

dove gli angoli θ sono gli angoli che i vettori formano con l'asse z e gli angoli φ sono gli angoli che le proiezioni dei vettori sul piano XY formano con l'asse x.

Calcoliamo l'angolo fra i vettori tramite il prodotto scalare e poi esprimiamo le componenti in coordinate sferiche.

$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = V_1V_2 \cos \theta_{1,2}$

$\cos \theta_{1,2} = \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 / V_1V_2 = (V_{1,x} V_{1,x} + V_{1,y} V_{1,y} + V_{1,z} V_{1,z}) / V_1V_2 =$

$= (V_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_1 V_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 + V_1 \sin \theta_1 \sin \varphi_1 V_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2 + V_1 \cos \theta_1 V_2 \cos \theta_2) / V_1V_2$

$$\cos \theta_{1,2} = (\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2$$

Calcoliamo l'angolo al centro della sfera terrestre fra i due punti individuati dalle città di San Francisco e New York.

Occorre individuare gli angoli θ e φ dei due punti sulla sfera rispetto al centro della sfera stessa.

Per definizione la latitudine λ è l'angolo del punto considerato rispetto al piano equatoriale, quindi è il complementare di θ, perciò θ = 90° – λ.

La longitudine è invece l'angolo del punto rispetto al meridiano di riferimento (meridiano di Greenwich) e quindi coincide proprio con l'angolo φ.

Allora i dati sono:

$\theta_1 = 90° - 37°\ 45' = 52.25°$

$\theta_1 = 90° - 40°\ 40' = 49.34°$

$\varphi_1 = 122.45°$

$\varphi_2 = 73.83°$

Dunque l'angolo fra le due città è:

$$\theta_{1,2} = \arccos\ (\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos\theta_1 \cos\theta_2 = 37.3°$$

(Il prob. 2.17 dava come risultato 37.2°)

3.29 Dato il gruppo di 3 vettori non complanari $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, i vettori

$$\boldsymbol{a}^1 = \frac{\boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3}$$

$$\boldsymbol{a}^2 = \frac{\boldsymbol{a}_3 x \boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3}$$

$$\boldsymbol{a}^3 = \frac{\boldsymbol{a}_1 x \boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3}$$

sono chiamati vettori reciproci. Dimostrare che $\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_i = 1$ e che $\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = 0$ dove i e j possono avere valori 1, 2, 3**. Discutere la disposizione geometrica dei vettori reciproci rispetto ai vettori $\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$.**

I tre vettori assegnati sono non complanari ossia linearmente indipendenti e costituiscono perciò una base di R^3. I vettori reciproci sono dunque

$$\boldsymbol{a}^1 = \frac{\boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3} \qquad \boldsymbol{a}^2 = \frac{\boldsymbol{a}_3 x \boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3} \qquad \boldsymbol{a}^3 = \frac{\boldsymbol{a}_1 x \boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3}$$

Il denominatore, che è lo stesso per i tre vettori, non è altro, come si è già notato nel prob. 3.19, che il volume del parallelepipedo di lati $\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ ed $\mathbf{a}_3$, mentre il modulo dei numeratori rappresentalo le aree dei parallelogrammi di lati $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_3$; $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, perciò le dimensione dei vettori reciproci sono delle inverse di lunghezze $|L|^{-1}$.

Ora per mostrare che $\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = 0$

basta considerare che, ad esempio $\mathbf{a}^1$, essendo il risultato del prodotto vettore

$\mathbf{a}_2$ **x** $\mathbf{a}_3$ sarà perpendicolare al piano da essi formato, quindi inevitabilmente il prodotto scalare sarà nullo, ovviamente stesso ragionamento per gli altri due vettori, quindi vale sicuramente la relazione $\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = 0$.

Per mostrare la validità della seconda relazione $\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_i = 1$ consideriamo il modulo dei vettori reciproci, fissiamo l'attenzione per ragionare ad esempio su $\mathbf{a}^1$, sarà:

$$\left|\boldsymbol{a}^1\right| = \frac{|\boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3|}{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3} = \frac{|\boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3|}{|\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3|} = \frac{|\boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3|}{|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3|\cos\vartheta} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}_1|\cos\vartheta}$$

(dove θ è l'angolo fra $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$x$\mathbf{a}_3$)

per inciso si noti che il modulo del vettore a^1 è proporzionale all'inverso del modulo di a_1, da cui il nome di vettore reciproco.

Allora ne viene che:

$$\boldsymbol{a}^1 \cdot \boldsymbol{a}_1 = |\boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3||\boldsymbol{a}_1|\cos\vartheta = \frac{1}{|\boldsymbol{a}_1|\cos\vartheta}|\boldsymbol{a}_1|\cos\vartheta = 1$$

Lo stesso vale per gli altri due casi, dunque abbiamo così mostrato la validità anche del secondo asserto $\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_i = 1$

Per far vedere la relazione "grafica" fra i vettori supponiamo che i vettori siano i seguenti:

$\mathbf{a}_1 = 2\,\mathbf{i}$ $\quad |\mathbf{a}_1| = 2$

$\mathbf{a}_2 = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$ $\quad |\mathbf{a}_2| = \sqrt{5} = 2.2$

$\mathbf{a}_3 = \mathbf{k}$ $\quad |\mathbf{a}_3| = 1$

$$\boldsymbol{a}^1 = \frac{\boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3} = \frac{2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}}{4} = \frac{1}{2}\boldsymbol{i} - \frac{1}{4}\boldsymbol{j}$$

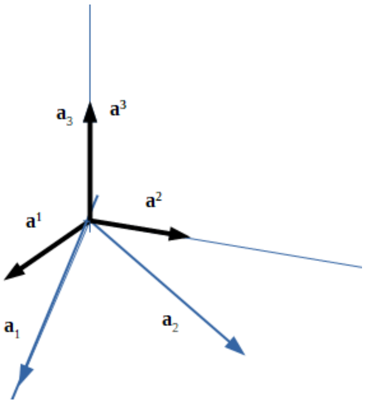
$\mathbf{a}^1 = |2\mathbf{i} - \mathbf{j}| / 4 = \sqrt{5} / 4 = 0.55$

Così vediamo anche la conferma della relazione $\left|\boldsymbol{a}^1\right| = \frac{1}{|\boldsymbol{a}_1|\cos\vartheta}$ infatti essendo $|\mathbf{a}_1| = 2$ e

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}^1}{|\boldsymbol{a}_1| \cdot |\boldsymbol{a}^1|} = \frac{1}{2(\sqrt{5}/4)} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$ si vede che $$\left|\boldsymbol{a}^1\right| = \frac{1}{|\boldsymbol{a}_1|\cos\vartheta} = \frac{1}{2 \cdot 2/\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{4} = 0.55$$

e l'angolo vale $\theta = \arccos 2/\sqrt{5} = 27°$

Calcolando gli altri due vettori reciproci si ha



$$a^1 = \frac{a_2 x a_3}{a_1 \cdot a_2 x a_3} = \frac{2i - j}{4} = \frac{1}{2} i - \frac{1}{4} j \qquad a^1 = \sqrt{5}/4 = 0.55$$

$$a^2 = \frac{a_3 x a_1}{a_1 \cdot a_2 x a_3} = \frac{2j}{4} = \frac{1}{2} j \qquad a^2 = 1/2 = 0.5$$

$$a^3 = \frac{a_1 x a_2}{a_1 \cdot a_2 x a_3} = \frac{4k}{4} = k \qquad a^3 = 1$$

I vettori reciproci sono utilizzati nella fisica dello stato solido per lo studio dei reticoli cristallini, cioè la disposizione nello spazio degli atomi che costituiscono un solido di tipo cristallino, i vettori reciproci costituiscono la base elementare del reticolo reciproco che è una costruzione geometrica astratta, basata sull'algebra vettoriale che permette di interpretare *quantitativamente* osservazioni fisiche sperimentali, come gli 'spettri' di diffrazione di raggi X, elettroni, neutroni (da cui si ottengono le strutture cristalline e molecolari), o il comportamento degli elettroni nei solidi.

Come esempio semplice consideriamo un reticolo reale di tipo cubico semplice, dove ogni atomo del solido è disposto ai vertici di un cubo, e notiamo che i vettori "diretti" possono essere scritti così:

$\mathbf{a}_1 = \mathbf{i}$

$\mathbf{a}_2 = \mathbf{j}$

$\mathbf{a}_3 = \mathbf{k}$

Allora essendo il volume della cella elementare V = $\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) = a^3$, i vettori reciproci saranno i seguenti

$\mathbf{a}^1 = (2\pi/a)\, \mathbf{i}$

$\mathbf{a}^2 = (2\pi/a)\, \mathbf{j}$

$\mathbf{a}^3 = (2\pi/a)\, \mathbf{k}$

Ossia in questo caso il reticolo reciproco è anch'esso di tipo cubico semplice cambia solo il passo del reticolo che anziché essere uguale ad uno è ora $2\pi/a$.

3.30 Dimostrare che qualsiasi vettore V può essere scritto in una delle due forme

$\mathbf{V} = (\mathbf{V}\cdot\mathbf{a}^1)\,\mathbf{a}_1 + (\mathbf{V}\cdot\mathbf{a}^2)\,\mathbf{a}_2 + (\mathbf{V}\cdot\mathbf{a}^3)\,\mathbf{a}_3 = \Sigma_i\,(\mathbf{V}\cdot\mathbf{a}^i)\,\mathbf{a}_i$ **oppure**

$\mathbf{V} = (\mathbf{V}\cdot\mathbf{a}_1)\,\mathbf{a}^1 + (\mathbf{V}\cdot\mathbf{a}_2)\,\mathbf{a}^2 + (\mathbf{V}\cdot\mathbf{a}_3)\,\mathbf{a}^3 = \Sigma_i\,(\mathbf{V}\cdot\mathbf{a}_i)\,\mathbf{a}^i$

Poiché $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ed $\mathbf{a}_3$ sono vettori non complanari essi sono linearmente indipendenti e formano una base in R^3, pertanto ogni vettore **V** in R^3 può essere scritto come combinazione lineare di essi in questo modo sintetico:

$$\mathbf{V} = \mu_1\,\mathbf{a}_1 + \mu_2\,\mathbf{a}_2 + \mu_3\,\mathbf{a}_3 = \Sigma\,\mu_i\,\mathbf{a}_i \quad (1)$$

ma anche i vettori reciproci sono linearmente indipendenti in quanto contrariamente si avrebbe ad esempio $\mathbf{a}^1 = \lambda_1\,\mathbf{a}^2 + \lambda_2\,\mathbf{a}^3$

cioè uno dei due potrebbe scriversi come combinazione lineare degli altri due con λ_1 o $\lambda_2 \neq 0$, ma questo non può essere. Dobbiamo far vedere che sussiste la seguente relazione

$\mathbf{V} = \mu_1\,\mathbf{a}_1 + \mu_2\,\mathbf{a}_2 + \mu_3\,\mathbf{a}_3 = (\mathbf{V}\cdot\mathbf{a}^1)\,\mathbf{a}_1 + (\mathbf{V}\cdot\mathbf{a}^2)\,\mathbf{a}_2 + (\mathbf{V}\cdot\mathbf{a}^3)\,\mathbf{a}_3$

per ovvie ragioni è sufficiente analizzare solo il primo addendo, dunque dobbiamo far vedere che

$(\mathbf{V}\cdot\mathbf{a}^1)\,\mathbf{a}_1 = \mu_1\,\mathbf{a}_1$

per far ciò basta esplicitare il calcolo:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{a}^1 &= (\mu_1\boldsymbol{a}_1 + \mu_2\boldsymbol{a}_2 + \mu_3\boldsymbol{a}_3)\cdot\frac{\boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3} = \\ &= \mu_1\boldsymbol{a}_1\cdot\frac{\boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3} + \mu_2\boldsymbol{a}_2\cdot\frac{\boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3} + \mu_3\boldsymbol{a}_3\frac{\boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3} = \\ &= \mu_1\frac{\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2 x \boldsymbol{a}_3} + 0 + 0 = \mu_1\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato la nota proprietà di algebra vettoriale:

$\mathbf{a}_1\cdot(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3) = \mathbf{a}_3\cdot(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3) = 0$ $\mathbf{a}_1\cdot(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \neq 0$

Dunque abbiamo effettivamente mostrato la validità della relazione proposta dal problema:

$\mathbf{V} = \Sigma\,\mathbf{V}\cdot\,\mathbf{a}^i)\,\mathbf{a}_i$

Analogamente si procede per mostrare la validità della seconda relazione

$\mathbf{V} = \Sigma\,\mathbf{V}\cdot\,\mathbf{a}_i)\,\mathbf{a}^i$

3.31 **Chiamando $\mathbf{V}\cdot\mathbf{a_i} = V_i$ e $V^j = \mathbf{V}\cdot\mathbf{a_i}$ le componenti covarianti e controvarianti di V**, e $g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$, $g^{ij} = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^j$ **dimostrare che**

$V^j = \Sigma_i V_i g^{ij}$, $V_j = \Sigma_i V^i g_{ij}$ e che $V^2 = \Sigma_i V_i V^i = \Sigma_{i,j} V_i V_j g^{ij} = \Sigma_{i,j} V^i V^j g_{ij}$.

Siano date le seguenti definizioni:

$V_i = \mathbf{V}\cdot\mathbf{a_i}$ componente covariante di **V**

$V^i = \mathbf{V}\cdot\mathbf{a^i}$ componente controvariante di **V**

e si ponga inoltre $g_{ij} = \mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j$ e $g^{ij} = \mathbf{a}^i\cdot\mathbf{a}^j$

a) Per le definizione appena date il prodotto scalare $\mathbf{V}\cdot\mathbf{a^j}$ può essere sviluppato nel seguente modo

$V^j = \mathbf{V}\cdot\mathbf{a^j} = (V_i\,\mathbf{a^i})\cdot\mathbf{a}^j = V_i\,(\mathbf{a^i}\cdot\mathbf{a}^j) = V_i\,g^{ij}$

b) per mostrare la validità della seconda tesi operiamo con la stessa logica su V_j:

$V_j = \mathbf{V}\cdot\mathbf{a_j} = (V^i\,\mathbf{a_i})\cdot\mathbf{a_j} = V^i\,(\mathbf{a_i}\cdot\mathbf{a}_j) = V^i\,g_{ij}$

c) $V^2 = \mathbf{V}\cdot\mathbf{V} = \mathbf{V}\cdot(V^i\,\mathbf{a_i}) = V^i\,\mathbf{V}\cdot\mathbf{a_i} = V^i\,V_i = (V^i\,\mathbf{a}_i)\,(V^j\mathbf{a}_j) = V^i\,V^j\,(\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a_j}) = V^i\,V^j\,g_{ij}$

$= (V_i\,\mathbf{a}^i)\,(V_j\,\mathbf{a}^j) = V_iV_j\,(\mathbf{a^i}\cdot\mathbf{a^j}) = V_iV_j\,g^{ij}$

3.32 **Dimostrare che $\mathbf{a}^1\cdot\mathbf{a^2} \times \mathbf{a^3} = 1/(\mathbf{a_1}\cdot\mathbf{a_2} \times \mathbf{a_3})$.**

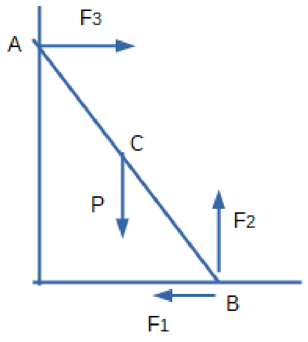
Per provare l'asserto basta sviluppare i calcoli:

$$(\boldsymbol{a}^1\cdot\boldsymbol{a}^2 x\,\boldsymbol{a}^3)\cdot(\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2 x\,\boldsymbol{a}_3) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}^1 & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}^3 \\ \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}^1 & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}^3 \\ \boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}^1 & \boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}^3 \end{vmatrix} = 1$$

Il determinante vale 1 in forza della relazione $\mathbf{a}^i\cdot\mathbf{a}_j = \delta_{ij}$. Come si è già notato il prodotto triplo non è altro che il volume della cella fondamentale del solido cristallino per cui possiamo dire che

$$V_{reticolo\ .diretto}\,V_{reticolo\ reciproco} = 1$$

4.50 Dimostrare che la risultante delle forze F_1 e F_2 della figura seguente passa per il punto di incontro di F_3 e di P, ed è uguale ed opposta alla loro risultante. Era prevedibile questo risultato?



Sempre riferendoci alla figura del testo, riportiamo i valori delle forze:

$F_1 = F_3 = 11.52$ lbf

$F_2 = P = 40$ lbf

Il risultanti sono:

$\mathbf{R_1} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = 11.52\ \mathbf{i} + 40\ \mathbf{j}$

$\mathbf{R_2} = \mathbf{F_3} + \mathbf{P} = -\ 11.52\ \mathrm{i} - 40\ \mathbf{j}$

da cui discende immediatamente

$\mathbf{R_1} = -\ \mathbf{R_2}$ il loro modulo è:

$R_1 = R_2 = (11.52^2 + 40^2)^{1/2} = 41.6$ m

Le coordinate del punto Q sono x = ½L cos α e y = L sin α, quindi possiamo scrivere

in modo più compatto:

Q (½L cos α; L sin α)

lasciando indicato con α in modo generico l'angolo dell'asta.

Le coordinate del punto B sono

B (L cos α; 0)

L'equazione della retta passante per i punti Q e B è:

$$\frac{y-0}{L\sin\alpha} = \frac{x - L\cos\alpha}{½L\cos\alpha - L\cos\alpha}$$

cioè:

y = − (2 tan α) x + 2L sin α

Infine verifichiamo che il punto Q appartiene alla retta:

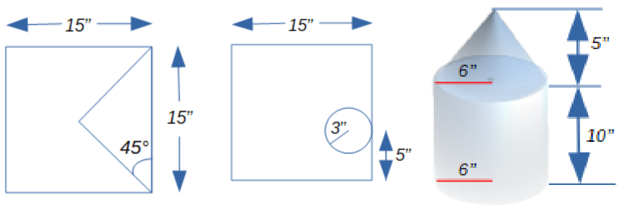
L sin α = − (2 tan α) (½L cos α) + 2L sin α da cui discende

sin α = sin α

Quindi effettivamente la retta su cui giace il risultante $\mathbf{R}_1$ interseca il punto di intersezione fra la retta in cui giace forza peso e la retta su cui giace la reazione vincolare della parete (liscia).

Si può concludere affermando che mentre la relazione $\mathbf{R}_1 = -\mathbf{R}_2$ ci assicura l'equilibrio delle forze. la proprietà appena vista su $\mathbf{R}_1$ ci assicura l'equilibrio dei momenti, infatti se $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$ (che hanno lo stesso modulo) giacciono si una stessa retta il loro momento sarà nullo.

4.51 Trovare il CM **dei tre corpi omogenei indicati nella figura seguente.**



Nei tre casi ci riferimento alle figure del testo.

a) Procediamo al calcolo del CM per differenza.

Prendiamo come ascisse la base e come ordinate il lato verticale di sinistra.

Utilizziamo il noto risultato del baricentro di un triangolo omogeneo che ci dice che il CM sarà situato a h/3, con h altezza del triangolo, e nel nostro caso h = L/2.

$$x_{cm} = \frac{A_Q x_{cm,Q} - A_T x_{cm,T}}{A_Q - A_T} = \frac{L^2(L/2) - (L^2/4)(5/6)L}{L^2 - L^2/4} = \frac{7}{18}L = 5.83\ in$$

Per simmetria è ovvio che sia

$y_{cm} = L/2$

Il centro di massa dista quindi 1.67 in a sinistra dal centro della lamina.

b) Per semplicità utilizziamo un riferimento centrato nel centro della lamina, asse x verso sinistra e y verso il basso, dai valori numerici del testo si ha (essendo le coordinate del centro di massa del cerchietto x = 4.5 in e y = 2.5 in):

$$x_{cm} = \frac{0 - \pi r^2 4.5}{L^2 - \pi r^2} = -0.65\, in$$

$$y_{cm} = \frac{0 - \pi r^2 2.5}{L^2 - \pi r^2} = -0.36\, in$$

c) La simmetria ci suggerisce il riferimento con l'asse x perpendicolare alla base del cilindro e passante per il vertice del cono. Ricordando che il CM di un cono retto, di altezza h, è sulla verticale passante per il suo vertice ad altezza dalla base pari a h/4, si ha:

$$x_{cm} = \frac{x_{cm,cilindro}V_{cilindro} + x_{cm,cono}V_{cono}}{V_{cilindro} + V_{cono}} = \frac{½h\pi r^2 h + (h + ¼h')⅓\pi r^2 h'}{\pi r^2 h + ⅓\pi r^2 h'} = \frac{½h^2 + (h + ¼h')⅓h'}{h + ⅓h'}$$

essendo

h = altezza del cilindro = 10''

h' = altezza del cono = 5''

si ha

x_{cm} = 5.89 in

Si noti come il CM del nostro sistema è indipendente dal valore del raggio di base.

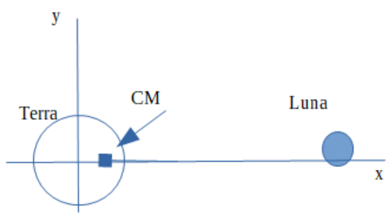
4.52 Trovare il CM **(a) del sistema Terra -Luna e (b) del sistema Terra -Sole. Si faccia uso dei dati elencati nella Tab. A-7.**

Basta applicare la formula:

a) Terra -Luna

$$x_{cm} = \frac{M_T d_T + M_L d_L}{M_T + M_L} = \frac{0 + 7.34\cdot 10^{22}\cdot 3.84\cdot 10^8}{5.98\cdot 10^{24} + 7.34\cdot 10^{22}} = 4.66\cdot 10^3 km$$

Notiamo che il centro di massa cade all'interno della Terra in quanto il suo raggio è $6.38\cdot 10^3$ km

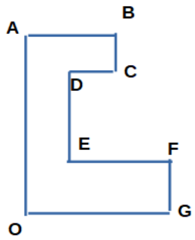


b) Terra-Sole

$$x_{cm} = \frac{M_S d_S + M_T d_T}{M_T + M_S} = \frac{0 + 5.98\cdot 10^{24}\cdot 1.5\cdot 10^{11}}{5.98\cdot 10^{24} + 1.99\cdot 10^{30}} = 448\cdot 10^3 km$$

Notiamo che il centro di massa cade all'interno del Sole essendo il suo raggio di 695 10^3 km.

4.53 Trovare le coordinate del CM **del corpo omogeneo rappresentato nella figura seguente;** AB = 3 cm; BC = 2 cm; CD = 1.5 cm; DE = 6 cm, EF = 4 cm, FG = 2 cm. GO = 5.5 cm, OA = 10 cm.



Riferendoci alla figura del testo (con ascisse lungo OG e ordinate lungo AO) suddividiamo la lamina omogenea in tre settori: il rettangolo di lati AB e BC, il rettangolo di lati DE e (AB − DC) ed il rettangolo di lati FG e EF, dai dati numerici ricaviamo le coordinate dei tre baricentri o centri di massa (lamina omogenea)

G_1 (1.5, 9); G_2 (0.75, 5); G_3 (2.75, 1).

$$x_{cm} = \frac{A_{T1}G_{1,x} + A_{T2}G_{2,x} + A_{T3}G_{3,x}}{A} = \frac{6\cdot 1.5 + 9\cdot 0.75 + 11\cdot 2.75}{26} = 1.77\,cm$$

$$y_{cm} = \frac{A_{T1}G_{1,y} + A_{T2}G_{2,y} + A_{T3}G_{3,y}}{A} = \frac{6\cdot 9 + 9\cdot 5 + 11\cdot 1}{26} = 4.23\,cm$$

4.54 Determinare la posizione del CM **delle seguenti molecole: (a)** CO**, se la distanza tra gli atomi di** C **e di** O **è di** $1.13\cdot 10^{-10}$ m**. (b)** CO_2, **è una molecola lineare con l'atomo di carbonio nel mezzo equidistante dai due atomi di** O**. (c)** H_2O, **questa molecola è piegata ad angolo con l'atomo di** O **al vertice; la distanza** O-H **è** $0.91\cdot 10^{-10}$ m**, e l'angolo tra i due legami** O-H **è di** 105°**. (d)** NH_3, **questa molecola è piramidale con l'atomo di N al vertice e la distanza** N-H **è di** $1.01\cdot 10^{-10}$ m**, mentre l'angolo tra i due legami** N-H **è di** 108°.

Con i dati del problema abbiamo:

1 amu = $1.6605\cdot 10^{-27}$ kg

m_C = 12.01 amu = $19.94\cdot 10^{-27}$ kg

m_O = 15.999 amu = $26.57\cdot 10^{-27}$ kg

m_H = 1.008 amu = $1.67\cdot 10^{-27}$ kg

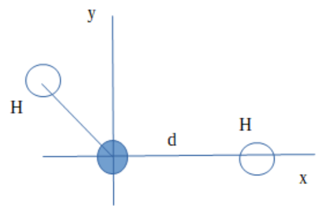
m_N = 14.007 amu = $23.26\cdot 10^{-27}$ kg

a) Considerando l'origine delle ascisse sull'atomo di carbonio si ha:

$$x_{cm} = \frac{0 + m_O d}{m_O + m_C} = \frac{26.57\cdot 10^{-27}\cdot 1.13\cdot 10^{-10}}{46.4\cdot 10^{-27}} = 0.64\cdot 10^{-10}\,cm$$

b) Considerando la disposizione spaziale della molecola di CO_2 con l'atomo di carbonio al centro e i due atomi di ossigeno (di ugual massa) disposti in linea retta evidentemente il centro di massa coincide con l'atomo di carbonio.

c)



d = $0.91 \cdot 10^{-10}$ m

$$x_{cm} = \frac{0 + m_H d - m_H d \cos 75°}{m_O + 2m_H} = \frac{1.67 \cdot 10^{-27} \cdot 0.91 \cdot 10^{-10} - 1.67 \cdot 10^{-27} \cdot 0.91 \cdot 10^{-10} \cos 75°}{29.91 \cdot 10^{-27}} = 0.038 \cdot 10^{-10}\, cm$$

$$y_{cm} = \frac{0 + 0 + m_H d \sin 75°}{m_O + 2m_H} = \frac{1.67 \cdot 10^{-27} \cdot 0.91 \cdot 10^{-10} \sin 75°}{29.91 \cdot 10^{-27}} = 0.049 \cdot 10^{-10}\, cm$$

d)

La base della piramide retta è un triangolo equilatero di lato ℓ , la cui altezza vale h = 2p/2√3 dove 2p è il perimetro, dunque h = 3ℓ/2√3, il alto del triangolo lo calcoliamo dalla relazione ½ℓ = d sin α

dove d è lo spigolo d = $10.14 \cdot 10^{-11}$ m,

allora il lato del triangolo di base vale

ℓ = 2 d sin α = $16.41 \cdot 10^{-11}$ m

e la sua altezza vele

h = 3ℓ/2√3 = $14.21 \cdot 10^{-11}$ m

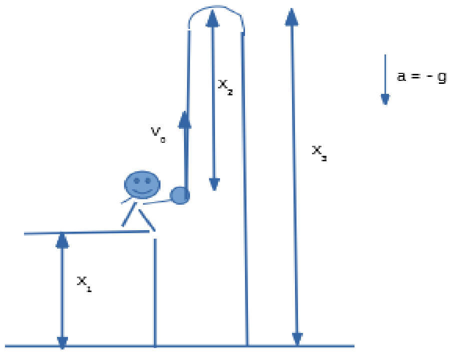
L'ortocentro (incontro delle tre altezze) del triangolo è anche la sede del CM per la simmetria del triangolo stesso, dunque possiamo immaginare che nell'ortocentro sia concentrata la massa dei tra atomi di idrogeno e calcolare immediatamente il CM della molecola che per simmetria appartiene all'altezza della piramide, (asse x: dall'ortocentro verso il vertice della piramide):

Dove H (altezza della piramide) lo abbiamo calcolato con Pitagora al triangolo rettangolo formato da H da d e da D, doce D è la distanza dell'ortocentro da un verice del triangolo di base che come noto dalla geometria vale D = ⅔ h = $9.47 \cdot 10^{-11}$ m, allora H = $(d^2 – D^2)^{1/2}$ = $3.62 \cdot 10^{-11}$ m:

$$x_{cm} = \frac{0 + m_N H}{m_N + 3m_H} = \frac{23.26 \cdot 10^{-27} \cdot 3.62 \cdot 10^{-11}}{28.27 \cdot 10^{-27}} = 2.98 \cdot 10^{-11}\, m$$

5.23 Un uomo che sta sul tetto di un edificio lancia una palla verticalmente verso l'alto con velocità 40 ft/s **e la palla tocca terra dopo** 4.25 s**. Qual è la massima quota raggiunta dalla palla? Quanto è alto l'edificio? Con quale velocità tocca terra?**

Facciamo riferimento alla seguente figura.



Calcoliamo dapprima il tempo occorrente alla palla per raggiungere la quota più alta, vale la relazione $v(t) = v_0 – gt$; indicando con t_1 il tempo che stiamo cercando si ha:

$v(t_1) = 0 = v_0 – g\, t_1$ da cui

$t_1 = v_0/g = 40/32.15 = 1.24$ s

L'eq. del moto è (considerando lo zero del SR alla sommità dell'edificio)

$x(t) = v_0 t – ½gt^2$

per cui l'altezza massima rispetto alla sommità dell'edificio, raggiunta dalla palla è

$x_2 = x(t_1) = v_0\, t_1 – ½g\, t_1^2 = 40·1.24 – ½\, 32.15·1.24^2 = 25.0$ ft

Ora siamo in grado di calcolare il tempo di caduta t_2:

$t_2 = t_v – t_1$

dove t_v è il tempo totale di volo:

$t_2 = 4.25 – 1.24 = 3.0$ s

Allora la distanza percorsa in questo lasso di tempo (x_3) vale:

$x_3 = ½g\, t_2^2 = 144.7$ ft

L'altezza dell'edificio è

$x_1 = x_3 – x_2 = 144.7 – 25.0 = 119.7$ ft

Infine la velocità con cu ila palla tocca terra è $v(x)^2 = v_0^2 + 2ax$

$v(x_3) = (v_0^2 + 2a\, x_3)^{1/2} = 0 + (2·32.15·144.7)^{1/2} = 96.5$ ft/s

5.24 Un corpo in caduta percorre nell'ultimo secondo del moto 224 ft**. Supponendo che il corpo sia partito da fermo, determinare da quale altezza è partito il corpo e quanto tempo ha impiegato a toccare terra?**

Dall'espressione della velocità per un corpo in caduta libera (accelerazione uniforme) da un'altezza h si ha:

$v = (2ax)^{1/2} = (2gh)^{1/2}$ ricavando h:

$h = v^2/2g = 224^2/(2 \cdot 32.15) = 780$ ft

Il tempo di caduta lo ricaviamo dall'espressione dello spazio percorso $x = h = \frac{1}{2}gt^2$:

$t = (2h/g)^{1/2} = 6.9$ s

5.25 Un sasso è lanciato verticalmente verso l'alto dal tetto di un edificio con velocità 29.4 m/s**, mentre un secondo sasso è lasciato cadere** 4 s **dopo il lancio del primo. Dimostrare che il primo sasso sorpasserà il secondo esattamente** 4 s **dopo che questo è partito.**

Partiamo analizzando il moto della prima pietra. Il tempo occorrente per arrivare all'altezza massima di lancio è (vedi problema precedente)

$t_1 = v_0/g = 29.4/9.8 = 3$ s

Questo tempo è uguale al tempo di caduta rispetto alla terrazza, quindi quando ripassa sull'orlo della terrazza il tempo trascorso è pari a 6 s e questo significa che il secondo sasso sta cadendo da 2 s, e in questi 2 secondi percorre uno spazio x_0 pari a $x_0 = \frac{1}{2}g2^2 = 19.6$ m e sempre dopo 2 secondi la sua velocità è

$v = gt = 9.8 \cdot 2 = 19.6$ m/s

Quindi quando il primo sasso si trova a transitare sulla terrazza il secondo sasso ha percorso già 19.6 m e possiede una velocità $v_0' = 19.6$ s. Se ora posizioniamo lo zero del tempo all'istante del transito del primo sasso sulla terrazza (quando il secondo sasso sta già cadendo da 2 s), le eq. del moto saranno:

$x_1 = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$

$x_2 = x_0 + v_0't + \frac{1}{2}gt^2$

Uguagliando le due posizioni si ricava t = 2 s, cioè 4 secondi dopo che il secondo sasso inizia la sua caduta.

c.v.d.

5.26 Un corpo viene lasciato cadere nello stesso istante in cui un secondo corpo viene lanciato verso il basso con velocità iniziale di 100 cm/s**. In quale istante la loro distanza sarà di** 18 m?

Le leggi del moto dei due corpi sono rispettivamente:

$x_1 = ½gt^2$ caduta libera

$x_2 = v_0t + ½gt^2$ caduta libera con velocità iniziale

La distanza fra i due corpi sarà di 18 m quando:

$x_2 – x_1 = 18$

$v_0t = 18$

$t = 18/1 = 18$ s

5.27 Due corpi sono lanciati verticalmente verso l'alto con la stessa velocità iniziale di 100 cm/s **ma a distanza di** 4 s**. Quanto tempo dopo il lancio del primo essi si incontreranno?**

Le eq. del moto sono rispettivamente per il sasso 1 e 2:

$x_1(t) = v_0t – ½gt^2$

$x_2(t) = v_0(t– 4) + ½g (t– 4)^2$

Nel momento dell'incontro avranno la medesima coordinata spaziale $x_1 = x_{2,}$

$v_0t – ½gt^2 = v_0(t– 4) + ½g(t– 4)^2$

Si noti che il valore corretto della velocità iniziale è 100 m/s e non cm/s.

Inserendo i valori numerici:

$t = (4v_0+8g)/4g = 2 + (v_{0/g)} = 12.2$ s

Verifichiamolo:

$x_1(12.2) = v_0(12.2)– ½g(12.2)^2 = 490.7$ m

$x_1(12.2) = v_0(12.2– 4) + ½g(12.2– 4)^2 = 490.7$ m

5.28 Un corpo è lasciato cadere liberamente. Dimostrare che la distanza percorsa durante l'n-esimo **secondo è** $(n - ½)g$**.**

La distanza percorsa dal grave in caduta libera durante l'ennesimo secondo è:

$h = x_n - x_{n-1} = ½gn^2 - ½g(n-1)^2$

dove x_n è la distanza percorsa dal grave in n secondi e x_{n-1} è la distanza percorsa dal grave in n–1 secondi, eseguendo i calcoli abbiamo:

$h = (n - ½)\, g$

5.29 Un sasso è lasciato cadere dalla sommità di un edificio e il suono prodotto dalla caduta a terra si sente dopo 6.5 s. **Se la velocità del suono è di** 1120 ft/s**, si calcoli l'altezza dell'edificio**.

Indichiamo con t il tempo di "ascolto" del tonfo del sasso con il fondo del pozzo (di altezza h), con t_c il tempo di caduta del sasso e con t_s il tempo occorrente all'onda sonora per andare dal fondo del pozzo alla sua sommità. Il tempo t è dato dalla somma dei due tempi t_c e t_s : $t = t_c + t_s$ mentre le eq. del moto sono:

$x_1 = ½gt_c^2$ e $x_2 = v_s\, t_s$ ovviamente è $h = x_1 = x_2$ pertanto si ha:

$½gt_c^2 = v_s t_s$ sostituendo il valore $t_s = t - t_c$ si ha:

$½gt_c^2 = v_s\, (t - t_c)$

$½gt_c^2 + 1120\, t_c - 7280 = 0$

La cui soluzione positiva è $t_c = 5.987$ s

Che sostituito all'eq. del moto $x_1(t)$ oppure $x_2(t)$ dà:

$h = x_1 = x_2 = 576$ ft

5.30 Calcolare la velocità angolare di un disco che ruota con moto uniforme descrivendo 13.2 rad **in** 6 s**. Calcolare anche il periodo e la frequenza di rotazione.**

Basta applicare la definizione di velocità angolare (media): $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

$\omega = 13.2 / 6 = 2.2$ rad/s

La frequenza è $\nu = \omega/2\pi = 0.35$ Hz ed il periodo è $T = 1/\nu = 2\pi/\omega = 2.85$ s

5.31 Quanto tempo impiegherà il disco del precedente problema (a) a ruotare di un angolo di 780°**, e (b) a compiere** 12 giri**?**

Il tempo impiegato per ruotare di un certo angolo di un punto mobile che si muove a velocità angolare costante è dal numero di giri effettuato per il periodo:

t = T N dove nel nostro caso N = 780°/360°, il periodo calcolate nel problema precedente era T = 2.85 s, dunque sarà:

t = 2.85·780°/360° = 6.18 s

Analogamente per compiere 12 giri il tempo necessario è

T = 12 T = 12· 2.85 = 34.2 s

5.32 Calcolare la velocità angolare delle tre lancette di un orologio.

La velocità angolare (media) è definita come $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

Per le lancette dei secondi: $\omega = \dfrac{2\pi(rad)}{60(s)} = 0.10\, rad/s$

Pe le lancette dei minuti: $\omega = \dfrac{2\pi(rad)}{3600(s)} = 0.0017\, rad/s$

Per le lancette delle ore: $\omega = \dfrac{2\pi(rad)}{43200(s)} = 0.00014\, rad/s$

5.33 Calcolare la velocità angolare, la velocità lineare e l'accelerazione centripeta della luna, sapendo che la luna compie una intera rivoluzione in 28 giorni **e che la distanza media terra-luna è di** $3.84 \cdot 10^5$ km**.**

Poiché la luna impiega 28 giorni a compiere un giro completo attorno alla Terra, il periodo di rivoluzione è:

$T = 28 \cdot 24 \cdot 3.6 \cdot 10^3 = 2.42 \cdot 10^6$ s

Ergo la sua velocità angolare è $\omega = 2\pi/T = 2.59 \cdot 10^{-6}$ rad/s

La velocità lineare è definita come v = ωR = 997 m/s

L'accelerazione centripeta è $a = v\omega = 2.59 \cdot 10^{-3}$ m/s^2

5.34 Trovare (a) il modulo della velocità e (b) l'accelerazione centripeta della terra nel suo moto attorno al sole. Il raggio dell'orbita terrestre è di $1.49 \cdot 10^{11}$ m **e il suo periodo di rivoluzione è di** $3.16 \cdot 10^{7}$ s**.**

Con i dati del problema abbiamo:

$\omega = 2\pi/T = 1.99 \cdot 10^{-7}$ rad/s

$v = \omega R = 2.96 \cdot 10^{4}$ m/s $\approx$ 30 km/s

$a = v\omega = v^2/R =$ 27 m/s^2

5.35 Trovare il modulo della velocità e dell'accelerazione centripeta del sole nel suo moto attraverso la Via Lattea. Il raggio dell'orbita solare è $2.4 \cdot 10^{20}$ m **e il suo periodo di rivoluzione è di** $6.3 \cdot 10^{15}$ s.

Con i dati del problema abbiamo:

$\omega = 2\pi/T = 10^{-15}$ rad/s

$v = \omega R = 2.4 \cdot 10^{5}$ m/s $\approx$ 30 km/s

$a = v\omega = v^2/R = 2.4 \cdot 10^{-10}$ m/s^2

5.36 Un volano di 3 m **di diametro sta ruotando a** 120 giri/min**. Calcolare: (a) la frequenza, (b) il periodo, (c) la velocità angolare, e (d) la velocità lineare di un punto sulla periferia del volano.**

Per definizione la frequenza è il numero di giri compiuti nell'unità di tempo

$\nu = 120/60 = 2$ Hz

$T = 1/\nu = 0.5$ s

$\omega = 2\pi/T = 12.6$ rad/s

5.37 La velocità angolare di un volano aumenta uniformemente da 20 rad/s **a** 30 rad/s **in** 5 min**. Calcolare l'accelerazione angolare e l'angolo totale descritto.**

$\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{\theta_{fin} - \theta_{ini}}{\Delta t} = \dfrac{30-20}{5} = 2\, rad/s$ L'angolo spazzato è (tenendo presente che $\theta_{ini} = \theta_0$):

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 20 \cdot 5 + \frac{1}{2} 2 \cdot 5^2 = 125\, rad$$

Problema complementare 7.b

In un bicchiere cilindrico, avente una base di area S, viene versata dell'acqua fino a raggiungere un certo livello. Immergendovi un cubetto di ghiaccio avente area di base A e altezza L, dire se il livello dell'acqua aumenta, diminuisce o rimane inalterato.

Calcoliamo dapprima quanto vale la parte emersa del cubetto di ghiaccio.

Le forze in gioco, rispetto al cubetto, sono due: la forza peso (verso il basso) e la spinta di Archimede (verso l'alto).

All'equilibrio esse devono essere uguali:

$mg = F_A$

dove

$F_A \equiv$ massa del fluido spostato= $m_{fluido}\, g = \rho_f V_i g$

siccome il fluido è l'acqua possiamo rinominare $\rho_f \equiv \rho_a$

V_i il volume immerso del corpo

$mg = \rho_f V_i g$

la massa del corpo è $m = \rho_g V$ quindi $\rho_g V g = \rho_a V_i g$ (1)

Il volume del cubetto di ghiaccio è $V = AL$ ed il volume della sua parte immersa è $V_i = Ah$ dove h è appunto la quota di immersione del cubetto. Allora la (1) diventa $\rho_g V = \rho_a V_i$

$$\rho_g / \rho_a = V_i/V = h/L$$

Siccome cerchiamo una relazione non con h (parte immersa) ma con la parte emersa che indichiamo con y, abbiamo

$\rho_g / \rho_a = V_i/V = (L - y)/L$ da cui

$$y = L\left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_a}\right) \qquad (2)$$

Ora chiediamoci di quanto aumenta il livello dell'acqua nel bicchiere nel momento che immergiamo il pezzo di ghiaccio. Il volume aggiuntivo è dovuto evidentemente alla parte immersa del cubetto $V_i = Ah$. Se indichiamo con Δh_i la variazione di altezza dell'acqua si ha

$Sh_i = V_i = Ah$

$$\Delta h_i = \frac{A}{S}(L-y)$$

Di quanto aumenta il livello dell'acqua se invece di immergere il pezzo di ghiaccio semplicemente lo versiamo già sciolto? Inficando con Δh_f questa variazione dovremo prima trovare la massa del pezzo di ghiaccio e ricavare il relativo volume nel caso quella massa fosse acqua, ovvero $h_f = L\frac{A}{S}\frac{\rho_g}{\rho_a}$

L'eventuale differenza tra queste due quantità rappresenta di quanto si è alzato (o abbassato) il livello dell'acqua nel bicchiere. Abbiamo allora

$h_f - h_i = L\frac{A}{S}\frac{\rho_g}{\rho_a} - \frac{A}{S}(L-y)$ sostituendo la (2) si ha

$$h_f - h_i = 0$$

Quindi il livello dell'acqua nel bicchiere riamane inalterato ad avvenuto scioglimento del cubetto di ghiaccio.

Cap 8

Lavoro ed Energia

ENERGIA E LAVORO

Vorrei qui contestare un'idea che è stata introdotta nei testi di fisica in questi ultimi decenni, e cioè che l'energia di un corpo equivale alla sua capacità di compiere lavoro. Faccio mie le argomentazioni di Giovanni Tonzig esposte nel suo sito "www.giovannitonzig.it" e che qui riporto.

Quello di definire l'energia di un corpo come la sua « capacità di compiere lavoro », o la sua« attitudine all'esecuzione di lavoro », è un malvezzo estremamente diffuso: così diffuso da potersi quasi considerare una costante universale, una delle grandi costanti della Fisica. È sicuramente una definizione piacevole, anche perché trova riscontro nel significato (peraltro un po' vago) che ai vocaboli energia e lavoro si dà nel linguaggio di ogni giorno: secondo il quale, chi ha molta energia può compiere molto lavoro. Sennonché, in Fisica i ter-mini energia e lavoro hanno un significato tutto particolare, che va preso per quello che è. Secondo il linguaggio corrente il lavoro si ricollega all'idea di fatica, e questa all'idea di sforzo e insieme all'idea di tempo (durata dello sforzo), mentre secondo la terminologia della Fisica il lavoro si ricollega all'idea di forza e all'idea di spostamento nella direzione della forza: senza del quale spostamento, per grande che sia la forza il lavoro è zero. Così, secondo la terminologia della Fisica, il lavoro di chi tiene sollevato sopra la testa per un quarto d'ora un bilanciere da 50 kg è zero, perché la forza muscolare è applicata a un corpo che non si muove. Ed è zero anche il lavoro di chi trasporta per 2 km una valigia da 15 kg, perché la valigia si sposta in direzione orizzontale mentre la forza muscolare agisce in dire-zione verticale: cosicché lo spostamento nella direzione della forza, che è quello che conta ai fini del lavoro, è zero. La verità è che, per come il lavoro e l'energia vengono definiti, *tra energia di un corpo e lavoro da esso compiuto non esiste in Fisica alcuna correlazione di carattere generale*. Mi limito, per ora, a parlare di energia cinetica. Come tutti sanno (e come si deduce immediatamente dal teorema dell'energia cinetica), l'energia cinetica di un punto materiale K avente velocità v rappresenta il lavoro che le forze applicate a K hanno dovuto compiere per portare la velocità da zero a v. O anche, a meno del segno, il lavoro chele forze applicate a K dovranno compiere per azzerarne la velocità. E che relazione intercorre tra lavoro delle forze applicate a K e lavoro delle forze esercitate da K? In generale nessuna, assolutamente nessuna. È questo il punto!

Esempio. Un blocco A, portatore di una carica elettrica positiva, viene lanciato lungo un piano orizzontale, in assenza d'aria e di attrito, verso un blocco B che non ha possibilità di movimento, a sua volta carico di segno più. Dato che ognuno dei due blocchi esercita sull'altro una forza repulsiva, dal momento del lancio in poi A procede verso B perdendo via via velocità: se la sua velocità iniziale non è troppo grande, si arresta prima di arrivare a contatto con B per poi ripartire immediatamente dopo in direzione opposta. Durante la fase di rallentamento, A perde tutta la sua energia cinetica: quanto lavoro ha compiuto? Zero, visto che B, al quale è applicata la forza proveniente da A, non si è mosso. Viceversa B, pur essendo completamente privo di energia cinetica, ha compiuto un lavoro resistente esatta-mente uguale all'energia cinetica persa da A. E, dato che nulla vieta di ripetere l'esperienza all'infinito, la conclusione è che da un corpo privo di energia cinetica ci si può aspettare un lavoro comunque grande. E allora? Allora siamo all'evidenza: l'energia cinetica di un corpo non rappresenta affatto la sua attitudine all'esecuzione di lavoro.

Sintetizzando.

Se veramente l'energia di un corpo K rappresentasse la sua capacità di lavoro, all'esecuzione di un lavoro L da parte di K dovrebbe puntualmente corrispondere una diminuzione L della sua energia. Ma le cose non stanno affatto così, le variazioni dell'energia cinetica di un corpo K dipendono non dal lavoro compiuto da K, ma da quello compiuto da tutte le forze (conservative e non) che a K sono applicate (teorema dell'energia cinetica); e le variazioni dell'energia potenziale di K dipendono a loro volta non dal lavoro compiuto da K, ma da quello delle forze conservative applicate a K (definizione di energia potenziale). Dunque, le eventuali variazioni dell'energia complessiva di K dipendono solo dal lavoro delle forze non conservative applicate a K: *il fatto che l'energia di K abbia subìto una certa variazione non ci dice niente sul lavoro che K ha nel frattempo compiuto su altri corpi*.

Definizione di energia potenziale

Gli studenti, in generale, non hanno un buon rapporto con il concetto di energia potenziale. Nella loro modo di pensare l'energia potenziale va giusto bene per aggiustare i conti e arrivare alla fatidica affermazione «l'energia totale si conserva», ma al di là di questo non è ben chiaro che cosa veramente sia. Rispetto all'energia cinetica che, anche per merito della simpatica formuletta $½mv^2$, ha un significato così concreto, l'energia potenziale appare allo studente come qualcosa divago, di artificioso, di astratto. Circa l'astrattezza, lo studente non avrebbe difficoltà a ricredersi se il suo libro, o chi per esso, gli spiegasse che l'energia potenziale è nient'altro che una potenziale energia cinetica; che l'energia elettrica prodotta in una centrale è nient'altro che energia potenziale; che un motore elettrico e un motore a benzina «vanno a energia potenziale», rispettivamente elettrica o chimica; che quando paghiamo la bolletta della luce o del gas paghiamo l'energia potenziale – elettrica e chimica rispettivamente – che abbiamo consumato. Altro che concetto astratto! Ma c'è sempre un perché, qui il problema nasce con la definizione. Mi sono sempre chiesto come mai un concetto tanto semplice debba venire introdotto nei libri di testo in modo così contorto. Il discorso che viene fatto è tipicamente questo: l'energia potenziale di un corpo è il lavoro che dobbiamo compiere contro le forze del campo per spostare K da una posizione di riferimento arbitraria (poi però si precisa che è meglio scegliere una posizione infinitamente lontana) fino alla posizione in cui K si trova. Dire che è una definizione contorta è dire niente: il fatto è che è una definizione sbagliata. Come minimo si dovrebbe specificare «senza variazione dell'energia cinetica del corpo in questione», altrimenti il lavoro «che dobbiamo fare per spostarlo» è totalmente indeterminato. E resta ancora indeterminato se non aggiungiamo «in assenza di ogni altra forza», se cioè non specifichiamo che su K agiscono solo le forze del campo conservativo (gravitazionale, elettrico, elastico...) relativamente al quale stiamo definendo l'energia potenziale di K. Ma, anche con tali precisazioni, perché dovremmo necessariamente compiere del lavoro su K «per spostarlo» dalla posizione R di riferimento alla posizione Ain cui di fatto si tro-va? Forse non è necessario alcun lavoro: forse K, se lo abbandoniamo alle forze del campo, da R ad A ci va da solo. Fermiamoci un attimo su questo esempio: un sasso si trova sul ter-reno in una certa posizione A. Che cos'è la sua energia potenziale gravitazionale rispetto al riferimento R posto sulla verticale per Aa 30 m d'altezza? Secondo la definizione di cui sopra, è il lavoro «che dobbiamo compiere contro la forza peso per spostarlo da R ad A». Se non precisiamo «senza variazione dell'energia cinetica» diciamo una cosa ben strana, perché è chiaro che, se lo lasciamo fare, il sasso da R ad A ci va per conto suo. Dicendo «senza variazione dell'energia cinetica» diciamo invece una cosa giusta, perché se nello spostamento da R ad A il lavoro della forza peso è, in una data opportuna unità, 100, allora, per portarlo da R in A senza variazione dell'energia cinetica noi dovremmo compiere un lavoro -100, che è effettivamente l'energia potenziale del sasso in A rispetto a R. Ma -100 non è forse il lavoro compiuto dal peso se il sasso si sposta da A, dove si trova, a R? E allora non era tanto più semplice dire che l'energia potenziale gravitazionale del sasso in A rispetto a R è il lavoro che la forza peso compirebbe se il sasso si spostasse (venisse spostato) da A fino a R? Alcuni anni fa, nel libro 100 errori di Fisica, mi sono accalorato a proporre le seguenti definizioni di energia potenziale. Definizione estesa (introduttiva, per principianti): l'energia potenziale (gravitazionale, elettrica, ecc.) di un corpo K nella posizione A rispetto al riferimento R è il lavoro che le forze del campo (gravitazionale, elettrico, ecc.) compirebbero in relazione a un eventuale spostamento di K, lungo un percorso qualsiasi, da A ad R. Definizione breve (professionale): <u>*l'energia potenziale è il lavoro eventuale delle forze conservative.*</u> Perché chiamare «energia» tale lavoro? Perché se il lavoro viene effettivamente compiuto, compare la relativa variazione dell'energia cinetica: in più se il lavoro è positivo, in meno se il lavoro è negativo. Dunque <u>*l'energia potenziale, positiva o negativa, altro non è che una potenziale variazione, in più o in meno rispettivamente, dell'energia cinetica.*</u>

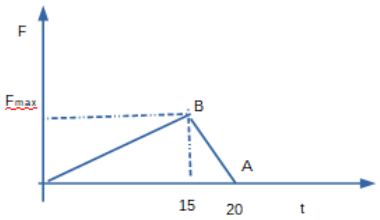
8.1 ***Una forza F è applicata per*** *20 s* ***a un corpo di massa*** *500 kg*. ***Il corpo, che inizialmente è in quiete, acquista per l'applicazione della forza una velocità di*** *0.5 m/s*. ***Se la forza cresce linearmente nel tempo partendo da zero per*** *15 s* ***e poi decresce linearmente fino a zero in*** *5 s*, ***(a) trovare l'impulso prodotto dalla forza sul corpo, (b) trovare la massima forza esercitata sul corpo e (c) rappresentare graficamente F in funzione di t e trovare l'area sottesa dalla curva. È in accordo questo valore dell'area con il risultato di (a)? Si supponga che F sia lo sola forza agente sul corpo.***

a) $I = p_f - p_i = p_f - 0 = m\, v_f = 500 \cdot 0.5 = 250$ Ns (1)

b) $F_1(t)$ cresce linearmente per $0 \le t \le 15$ s $F_1(t) = k_1 t$

il suo valore max sarà $F_{max} = 15\, k_1$

$F_2(t)$ decresce linearmente per $15 < t \le 20$ s



L'eq. della retta BA è $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$ con $(x_1; y_1) \equiv (20;0)$ e $(x_2\, y_2) \equiv (15;15k_1)$, si ha

$y \equiv F_2(t) = -3k_1\,(t - 20)$

Da cui notiamo subito che $k_2 = -3\, k_1$, come era lecito attendersi poiché F_1 impiega un tempo 3 volte superiore di F_2 per portarsi (in senso inverso) da 0 a $F_{max} \equiv 15k_1$

$$I = \int_{t_0}^{t} F dt = \frac{15 \cdot 15 k_1}{2} + \frac{5 \cdot 15 k_1}{2} = 150 k_1 \quad (2)$$

Dal punto a) avevamo calcolato il valore di I che deve ovviamente coincidere con la (2)

$150k_1 = 250$ da cui ne viene che $k_1 = 1.67$

Ed allora la forza massima è $F_{max} = 15\, k_1 = 15 \cdot 1.67 = 25$ N

8.2 Calcolare il lavoro di una forza costante di 12 N **quando il suo punto di applicazione si sposta di** 7 m**, se l'angolo fra le direzioni della forza e dello spostamento è (a)** 0°**, (b)** 60°**, (c)** 90°, **(d)** 145° **e (e)** 180°.

Dalla definizione di lavoro si ha;

a) $\alpha = 0°$ $L = F\,d \cos 0° = 12 \cdot 7 \cdot 1 = 84$ J

b) $\alpha = 60°$ $L = F\,d \cos 60° = 12 \cdot 7 \cdot 0.5 = 42$ J

c) $\alpha = 90°$ $L = F\,d \cos 90° = 12 \cdot 7 \cdot 0 = 0$ J

d) $\alpha = 0°$ $L = F\,d \cos 145° = 12 \cdot 7 \cdot (-0.82) = -68.8$ J

e) $\alpha = 180°$ $L = F\,d \cos 180° = 12 \cdot 7 \cdot (-1) = -84$ J

Il lavoro negativo significa semplicemente che la forza è opposta al moto (es. forza di attrito).

8.3 Calcolare il lavoro compiuto da un uomo che trascina un sacco di farina di 65 kg **per** 10 m **lungo il pavimento con una forza di** 25 kgf **e poi lo solleva su un carro, la cui piattaforma è alta** 75 cm**. Qual è la potenza sviluppata se l'intero processo dura** 2 min**?**

Il lavoro lungo la strada è $L_1 = F\,d = 25$ (kg-f) $\cdot$ 10 (m) = 245.25 (N) $\cdot$ 10 (m) = 2452.5 J

$L_2 = 65$(kg-f) $\cdot$ 0.75 (m) = 637.65 (N) $\cdot$ 0.75 (m) = 478.2 J

$L = L_1 + L_2 = 2930$ J

$P_{ave} = L/t = 2930/120 = 24.4$ W

8.4 Un piede-libbra è definito come il lavoro compiuto da una forza di 1 lbf **applicata a un corpo quando ne produce uno spostamento di** 1 ft **nella stessa direzione. Verificare che** 1 ft-lb **è uguale a** 1.356 J**, e che** 1 hp **è uguale a** 746 W**. Dimostrare che quando la massa è data in** slug **e la sua velocità in** ft/s**, l'energia cinetica è espressa in** ft-lb**.**

Essendo 1 lbf = 4.448 N e 1 ft = 0.30478 m si ha

1 ft-lb = 0.30478 $\cdot$ 4.448 = 1.356 J

1 hp è definito come 550 ft-lb e quindi

1 hp = 550$\cdot$1.356 J = 746 W

1 slug è definito (vedi pag. 163 del testo) 32.17 lb = 14.592 kg,

pertanto essendo l'energia il prodotto della massa per la velocità al quadrato si ha che

$1 slug \cdot (ft/s)^2 = 14.592 \cdot (0.30478/s)^2 = 1.356\ J = 1\ ft\text{-}lb$

c.v.d.

8.5 Un corpo di massa 4 kg **sale lungo un piano inclinato di** 20° **sull'orizzontale. Sul corpo agiscono le seguenti forze: una forza orizzontale da** 80 N**, Una forza da** 100 N **parallela al piano nel senso del moto, e una forza di attrito costante di** 10 N **che si oppone al moto. Il corpo scivola per** 20 m **sul piano. Calcolare il lavoro totale fatto dal sistema di forze agenti sul corpo e il lavoro fatto da ogni forza.**

Il lavoro totale delle forze attive sul corpo è uguale alla somma del lavoro di ogni singola forza oppure al lavoro del risultante delle forze.

Indichiamo con F_1 la forza orizzontale, F_2 la forza parallela al piano inclinato e con F_3 la forza di attrito, inoltre prendiamo l'asse x parallelo al piano inclinato e y ad esso perpendicolare verso l'alto.

a) $L_1 = F_{1,x}\, d = F_1 \cos 20°\, d = 80 \cdot \cos 20° \cdot 20 = 1503.5\ J$

$L_2 = 100 \cdot 20 = 2000\ J$

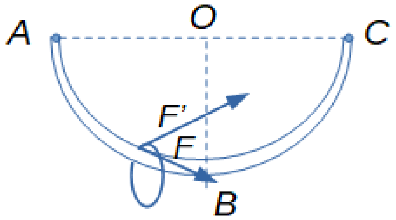
$L_3 = -\ 10 \cdot 20 = -\ 200\ J$

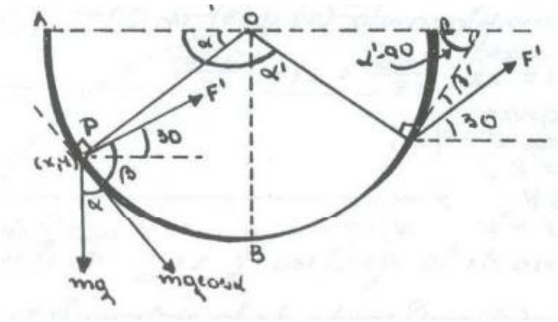
$L = L + L_2 + L_3 = 3304\ J$

b) $L = R_x\, d = (F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x}\,)\, d = (80 \cos 20° + 100 - 10) \cdot 20 = 3304\ J$

Notiamo che il risultante lungo y: $R_y = F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y} = 80 \sin 20° + 0 + 0 = 27\ N$ essendo perpendicolare alla direzione del moto non compie lavoro.

8.6 L'anello m di massa 5.0 kg **scivola su un arco metallico liscio** ABC **(vedi figura seguente) a forma di arco di cerchio di raggio** 4 ft. **Sul corpo agiscono due forze** F **e** F'**, di moduli rispettivamente,** 40 N **e** 150 N**. La forza F è tangente al cerchio, mentre la forza F' agisce in direzione costante formando un angolo di** 30° **con l'orizzontale. Calcolare il lavoro totale fatto dal sistema di forze agenti sul corpo per spostarlo da** A **a** B **e da** A **a** C.





Sciegliamo l'asse x tengente al moto e l'asse y ad esso perpendicolare, l'angolo α avrà senso antiorario con lo zero sull'asse OA.

Per completezza consideriamo attiva anche la forza peso che avrà la componente m g cos α tangente alla traiettoria mentre la componente y essendo perpendicolare al moto non compie lavoro.

Dunque avremo 3 forze attive su m:

$F_1 = m\, g \cos \alpha$, $F_2 = F$ e $F_3 = F'$

$L_1 = \int F_1 \cdot dr = \int mg \cos\alpha\, ds$

Dove ds è l'elemento d'arco legato alle coordinate x ed y dalle seguenti relazioni

$x = -r \cos \alpha$; $dx = r \sin \alpha\, d\alpha$

$y = -r \sin \alpha$ $dy = -r \cos \alpha\, d\alpha$

$ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2} = ((r\, d\alpha)^2 (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha))^{1/2} = r\, d\alpha$

$$L_1 = \int_0^{\pi/2} mg \cos\alpha\, r\, d\alpha = mgr \sin\alpha \Big|_0^{\pi/2} = mgr = 5.0 \cdot 9.82 \cdot 1.2 = 59.9 \text{ J}$$

$$L_2 = \int F ds = F \int_0^{\pi/2} r d\alpha = \frac{\pi}{2} Fr = ½\, \pi \cdot 40 \cdot 1.2 = 76.6 \text{ J}$$

Per il calcolo di L_3 indichiamo (come in figura) con β l'angolo fra F' e la tangente alla circonferenza, avendosi 90° – α = β – 30°, quindi β = 120° – α e quindi cos β = cos(120° – α).

$$L_3 = \int F' ds \cos\beta = \int_0^{\pi/2} F' r d\alpha \cos(120-\alpha) = -F' r \sin(120-\alpha)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} F' r =$$

$$= 0.366 \cdot 150 \cdot 1.2 = 65.9 \text{ J}$$

$L = L_1 + L_2 + L_3 = 59.9 + 76.6 + 65.88 = 202$ J

Calcoliamo ora il lavoro delle forze per andare da B a C.

$$L_1 = \int_{\pi/2}^{\pi} mg\cos\alpha\, r\, d\alpha = mgr\sin\alpha\Big|_{\pi/2}^{\pi} = -mgr = -59.9\,J$$

$$L_2 = \int F ds = F\int_{\pi/2}^{\pi} r d\alpha = \frac{\pi}{2}Fr = 76.6\,J$$

Osservando che quando l'anello va da B a C si ha che α' – 90° = β' + 30° da cui β' = α' – 120°, dunque:

$$L_3 = \int F' ds\cos\beta = \int_{\pi/2}^{\pi} F' r d\alpha \cos(\alpha' - 120°) = -F' r\sin(\alpha' - 120°)\Big|_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= F' r(\sin 60° - \sin(-30°)) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}F' r = 245.9\,J$$

$L = L_1 + L_2 + L_3 = -59.9 + 76.6 + 245.9 = 263$ J

Come si vede bel 61 J in più rispetto al lavoro delle forze nel tratto "in discesa".

8.7 Un corpo di massa 0.10 kg **cade da** 3 m **di altezza su un mucchio di sabbia. Se il corpo penetra per** 3 cm **prima di fermarsi, quale forza costante ha esercitato la sabbia sul corpo?**

Il lavoro (ossia l'energia potenziale cambiata di segno) acquistata dal corpo (a spese del campo gravitazionale) nel momento dell'impatto è (ricordando la relazione (8.16) del testo

$L = -mg(y_f - y_i)$ indicando con y_0 la quota iniziale e y quella finale

$L = -mg(y - y_0) = mg(y_0 - y) = 0.1·9.8·3 = 2.94$

Questa energia viene tutta "consumata" dall'attrito della sabbia che porta in quiete il corpo, questa forza che assumiamo essere costante (e verso contrario al moto, "lavoro resistente") si esercita per un tratto x, per cui si ha:

$L_A = -F_x x = -2.94$ J quindi la forza in modulo vale: $F_x = 2.94/x = 2.94/0.03 = 98$ N

8.8 Un corpo di massa 1000 kg **cade da** 10 m **di altezza su un palo metallico verticale conficcato nel terreno, che, per l'urto subito, affonda di un altro centimetro nel terreno. Calcolare la forza resistente media esercitata dal terreno sul palo. (Si supponga che tutta l'energia cinetica del corpo si trasformi in lavoro per interrare il palo).**

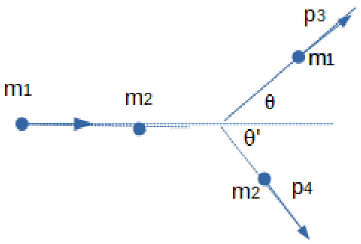
Ragionando come nel problema precedente:

$L = mgh = 10^3·9.8·10 = 98·10^3$ J = ½ m v^2

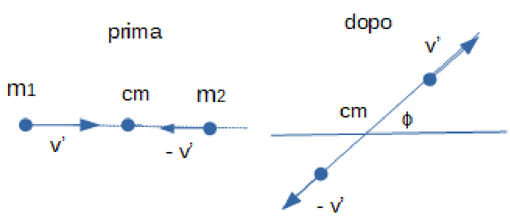
11.39 Una particella di massa di riposo m_1 e quantità di moto p_1 urta elasticamente una particella con massa di riposo m_2 in quiete nel sistema L e viene deviata di un angolo θ rispetto al sistema L e di un angolo φ rispetto al sistema C (rispetto alla direzione iniziale) e l'altra particella si muove in direzione opposta. Dimostrare che gli angoli θ e θ' ai quali esse si muovono rispetto al sistema L sono dati da $\tan\theta = (1 - v^2/c^2)^{1/2} \tan \frac{1}{2}\varphi$ **e** $\tan\theta' = (1 - v^2/c^2)^{1/2} \cot \frac{1}{2}\varphi$.

Si ricavi da ciò che $\theta + \theta' \le \frac{1}{2}\pi$ **e che, quanto più v si avvicina a c, tanto minore diventa l'angolo** θ + θ' **tra le due particelle nel sistema L. Si confronti con i risultati dati nell'Esempio 9.11 per un urto non relativistico. (Suggerimento: si noti che prima dell'urto le due particelle si muovono nel sistema C con velocità v e – v e che dopo l'urto, esse continuano a muoversi in direzioni opposte con le stesse velocità).**

La situazione nel SR del laboratorio è quella qui illustrata



Mentre nel SR del CM la situazione è la seguente



Nel velocità dopo l'urto nel SR fisso

$\mathbf{v}_3 = v_3 \cos\theta\, \mathbf{i} + v_3 \sin\theta\, \mathbf{j}$ (1)

$\mathbf{v}_4 = v_4 \cos\theta'\, \mathbf{i} + v_4 \sin\theta'\, \mathbf{j}$ (2)

invece nel SR del CM sono

$\mathbf{v}' = v' \cos\phi\, \mathbf{i} + v' \sin\phi\, \mathbf{j}$ (3)

Dobbaimo quindi valutare la relazione fra l'angolo θ e l'angolo ϕ, iniziamo con lo scrivere che $\tan\theta = v_{3,y}/v_{3,x}$ ora trasformiamo le due velocità usando le relazioni seguenti (già incontrate nel Prob.11.25)

$$v_x = \frac{v_x^{'} + v_{cm}}{1 + v_x^{'} v_{cm}/c^2}; \qquad v_y = \frac{v_y^{'}\sqrt{1 - v_{cm}^2/c^2}}{1 + v_x^{'} v_{cm}/c^2}$$

$$\tan\theta = \frac{v_{3,y}}{v_{3,x}} = \frac{v_y^{'}\sqrt{1 - v_{cm}^2/c^2}}{v_x^{'} + v_{cm}}$$

Essendo le velocità accentate quelle relative al CM, usando la (3) si ha

$$\tan\theta = \frac{v_{3,y}}{v_{3,x}} = \frac{v_y^{'}\sqrt{1-v_{cm}^2/c^2}}{v_x^{'}+v_{cm}} = \frac{v'\sin\phi\sqrt{1-v_{cm}^2/c^2}}{v'\cos\phi+v_{cm}}$$

Ribadiamo il significato dei vari simboli:

v_3 e v_4 sono velocità assolute, v' èla velocità relatica al CM e v_{cm} altro non è che la velocità di trascinamento, ma qui stiamo considerando due particelle con la stessa massa, perciò abbiamo che v_{cm} = v' (vedi Prob. 11.31), allora la relazione precedente diventa

$$\tan\theta = \frac{v'\sin\phi\sqrt{1-v'^2/c^2}}{v'\cos\phi+v'} = \frac{v'\sin\phi\sqrt{1-v'^2/c^2}}{v'(\cos\phi+1)} = \frac{\sin\phi\sqrt{1-v'^2/c^2}}{(\cos\phi+1)}$$

ora scriviamo sin ϕ = $(1 - \cos^2\phi)^{1/2}$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{(1-\cos^2\phi)}\sqrt{1-v'^2/c^2}}{(\cos\phi+1)} = \sqrt{1-v'^2/c^2}\sqrt{\frac{(1-\cos\phi)(1+\cos\phi)}{(\cos\phi+1)^2}} = \sqrt{1-v'^2/c^2}\sqrt{\frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi}}$$

Ora basta ricordare la relazione trigonometrica seguente

$\sqrt{\frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi}} = \tan\phi/2$ per arrivare al risultato atteso

$$\tan\theta = \sqrt{1-v'^2/c^2}\,\tan(\phi/2)$$

Per l'angolo θ' si ha

tan θ' = $- v_{4,y}/v_{4,x}$

e procedendo esattamente come sopra si arriva alla relazione

$$\tan\theta' = \frac{v'\sin\phi\sqrt{1-v'^2/c^2}}{-v'\cos\phi+v'} = \frac{v'\sin\phi\sqrt{1-v'^2/c^2}}{v'(-\cos\phi+1)} = \frac{\sin\phi\sqrt{1-v'^2/c^2}}{(1-\cos\phi)}$$

$$\tan\theta' = \sqrt{1-v'^2/c^2}\,\frac{\sqrt{1-\cos^2\phi}}{(1-\cos\phi)} = \sqrt{1-v'^2/c^2}\sqrt{\frac{1-\cos^2\phi}{(1-\cos\phi)^2}} = \sqrt{1-v'^2/c^2}\sqrt{\frac{(1-\cos\phi)(1+\cos\phi)}{(1-\cos\phi)^2}} =$$

$$= \sqrt{1-v'^2/c^2}\sqrt{\frac{1+\cos\phi}{1-\cos\phi}}$$

ricordando che si ha $\sqrt{\frac{1+\cos\phi}{1-\cos\phi}} = \mathrm{cotan}\,\phi/2$ si ha il risultato atteso

$$\tan\theta' = \sqrt{1-v'^2/c^2}\,\cot an(\phi/2)$$

Dalle relazioni trovate si vede che effettivamente si ha

θ+ θ' ≤ π/2 con la limitazione 0 ≤ ϕ ≤ π, e che (θ+ θ') è tanto più piccolo quanto più si v si avvicina a c, al limite per v = c si ha (θ+ θ') = 0

Nel caso in cui questo problema è non relativistico vale il risultato dell'Esempio 9.11 e si avrebbe che le velocità dopo l'urto nel sistema L sono perpendicolari.

11.40 Con riferimento al Prob. 11.37, verificare che se la particella 1 ha massa di riposo nulla, i valori di p_3 e di E_3 diventano quelli dell'Esempio 11.10.

L'espressione della q.d.m. sostituendo $E_1 = E$; $m_2 = 0$; $m_1 = m_0$; $p_1 = E/c$ diventa

$$p_3 = \frac{E/c(m_0 E\cos\theta + m_0 E + m_0^2 c^2)}{E^2/c^2 + m_0^2 c^2 + 2Em_0 - (E^2/c^2)\cos^2\theta} = \frac{E/c(m_0 E\cos\theta + m_0 E + m_0^2 c^2)}{(E/c + m_0 c)^2 - (E^2/c^2)\cos^2\theta} =$$

$$= \frac{E/c(m_0 E\cos\theta + m_0 E + m_0^2 c^2)}{((E/c + m_0 c) + (E/c)\cos\theta)((E/c + m_0 c) - (E/c)\cos\theta))} =$$

$$= \frac{m_0 E((E/c)(\cos\theta + 1) + (E/c)m_0 c^2)}{((E/c(\cos\theta + 1) + m_0 c)((E/c(1-\cos\theta) + m_0 c))} =$$

$$= \frac{m_0 E((E/c)(\cos\theta + 1) + m_0 c)}{((E/c(\cos\theta + 1) + m_0 c)((E/c(1-\cos\theta) + m_0 c))} = \frac{m_0 E}{(E/c)(1-\cos\theta) + m_0 c} =$$

$$= \frac{m_0 Ec}{E(1-\cos\theta) + m_0 c^2}$$

ma $p_3 = E_3/c$ quindi

$$E_3 = \frac{m_0 E}{((1-\cos\theta) + m_0 c))}$$

che è proprio l'espressione ricavata dall'Es. 11.10 del testo.

13.1 Calcolare la forza di attrazione gravitazionale tra la Terra e (a) la Luna, (b) il sole. Ricavare il rapporto tra queste due forze.

La forza gravitazionale fra la Terra e la Luna è $F = GM_TM_L/R^2$

essendo $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$; $M_T = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg ; $M_L = 7.34 \cdot 10^{22}$ kg; $R = 3.84 \cdot 10^8$ m

si ha $F = 1.98 \cdot 10^{20}$ N

Fra Terra e Sole invece la forza è $F' = 3.55 \cdot 10^{22}$ N

($M_S = 1.98 \cdot 10^{30}$ kg $R' = 1.49 \cdot 10^{11}$ m)

Il loro rapporto è $F'/F = 1.8 \cdot 10^2$

Quindi la forza gravitazionale fra la Terra ed il Sole è circa 200 volte quella fra Terra eLluna, anche se la distanza Terra Sole è circa 400 volte quella fra Terra e Luna!

$F_{T\text{-}S} \approx 200\ F_{T\text{-}L}$; $R_{T\text{-}S} = 400\ R_{T\text{-}L}$

13.2 Calcolare l'attrazione gravitazionale tra i due protoni della molecola di idrogeno. La loro distanza è $0.74 \cdot 10^{-10}$ m**.**

Essendo la distanza fra i due atomi di idrogeno $d = 0.74 \cdot 10^{-10}$ m e la massa del protone pari a $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg si ha $F = G(m_p\ m_p)/d^2 = 3.39 \cdot 10^{-44}$ N

13.3 Determinare la forza attrattiva gravitazionale tra il protone e l'elettrone in un atomo di idrogeno, supponendo che l'elettrone descriva un'orbita circolare di raggio $0.53 \cdot 10^{-10}$ m**.**

La forza gravitazionale fra elettrone e protone nell'atomo di idrogeno è

$F = G\ m_p\ m_e\ /R^2 = 3.6\ 10^{-47}$ N

Quindi da questi due problemi si evince che la forza gravitazionale fra i due protoni della molecola H_2 è circa mille volte la forza fra elettrone e protone nell'atomo di idrogeno!

13.4 Valutare la distanza media tra i due atomi di elio in una mole in condizioni normali. Nota tale distanza ricavare l'attrazione gravitazionale tra due atomi di elio contigui. La massa dell'atomo di elio può essere considerata di 4.0 amu**.**

In una mole in condizioni normali ci sono N_A atomi ed il volume occupato è di 22.4 L, dunque il volume occupato da un singolo atomo è $V = 22.4 \cdot 10^{-3}/6.022 \cdot 10^{23} = 3.72 \cdot 10^{-26}$ m^3

il raggio di tale sfera è $r = ((3/4\pi)\ V)^{1/3} = ((3/4\pi)\ 3.72 \cdot 10^{-26})^{1/3} = 2.07 \cdot 10^{-9}$ m

Supponendo che gli atomi siano contigui la doro distanza è $d = 2r = 4.14 \cdot 10^{-9}$ m

La forza gravitazione fra due atomi contigui è

$F = G (m_{He})^2/d^2 = 6.67\cdot10^{-11}\cdot(4\cdot1.66\cdot10^{-27})^2/(4.14\cdot10^{-9})^2 = 1.72\cdot10^{-46}$ N

13.5 Valutare la distanza media tra due molecole d'acqua nella fase liquida. Nota tale distanza ricavare l'attrazione gravitazionale tra due molecole di acqua contigue.

La densità dell'acqua, come noto, è $\rho = M/V = 10^3$ kg/m^3, la massa si una molecola è
$M = m_O + 2m_H = 16 + 2 = 18$ amu $= 2.99\cdot10^{-26}$ kg, il numero di molecole presenti in 1 m^3 sarà
n° = $10^3/2.99\cdot10^{-26} = 3.35\cdot10^{28}$ molecole. Il volume che occupa una molecola è V' = V/n° = 1 m^3/n° molecole = $1/3.35\cdot10^{28} = 2.98\cdot10^{-29}$ m^3. Il raggio di tale sfera è
$r = ((3/4\pi)\ V)^{1/3} = 1.92\cdot10^{-10}$ m. Assumendo le molecole essere contigue la loro distanza è d = 2r = $3.85\cdot10^{-10}$ m, La forza gravitazionale è allora
$F = 6.67\cdot10^{-11}\cdot(2\cdot2.99\cdot10^{-26})^2/(3.85\cdot10^{-10})^2 = 4\cdot10^{-43}$ N

13.6 Due sfere di ferro, ciascuna di massa 10 kg **si toccano. Calcolare la loro attrazione gravitazionale. Confrontarla con l'attrazione gravitazionale esercitata dalla Terra su ciascuna di esse. e si cerca di separare le due sfere, si "sente" l'attrazione tra esse?**

Per calcolare la forza gravitazionale dobbiamo conoscere la distanza fra le due sfere., a tal fine sfruttiamo la definizione stessa di densità: $V = M/\rho = 10/7.86\cdot10^3 = 1.27\cdot10^{-3}$ m^3
$r = ((3/4\pi)\ V)^{1/3} = 6.7$ cm, essendo le due sfere contigue la loro distanza è d = 2r = 0.134 m, allora la forza vale $F = 6.67\cdot10^{-11}\cdot(10\cdot10)/(0.134)^2 = 3.7\cdot10^{-7}$ N
La forza gravitazionale esercitata dalla Terra su una sfera di ferro è
$F' = G\ (m_{Fe} M_T)/R_T^2 = 6.67\cdot10^{-11}\ (10\cdot5.98\cdot10^{24})^2/(6.37\cdot10^6)^2 = 98$ N
Che altro non è che la forza peso della sfera $P = mg = 10\cdot9.8 = 98$ N
Il rapporto fra queste due forze è $F'/F = 0.26\cdot10^9$

13.7 Confrontare l'attrazione gravitazionale agente su un corpo di massa m sulla superficie della Terra (a) da parte della Luna, e (b) da parte del Sole, con l'attrazione della Terra sullo stesso corpo. Cosa potete concludere circa la possibilità di osservare una variazione del peso di un corpo durante la rotazione diurna della Terra?

Rispetto ad un corpo di massa m posto sulla superficie terrestre si ha:

$$F_{sole} = G\frac{mM_S}{R_S^2} = 6.67\cdot10^{-11}\,\frac{1.98\cdot10^{30}}{(1.49\cdot10^{11})^2}\,m = m5.9\cdot10^{-3}\ N$$

$$F_{luna} = G\frac{mM_L}{R_L^2} = 6.67\cdot 10^{-11}\frac{7.34\cdot 10^{22}}{(3.84\cdot 10^8)^2}m = m3.3\cdot 10^{-5}\ N$$

$$F_{terra} = G\frac{mM_T}{R_T^2} = 6.67\cdot 10^{-11}\frac{5.98\cdot 10^{24}}{(6.37\cdot 106)^2}m = m9.8\ N$$

Un corpo di massa di 0.1 kg subisce una forza gravitazionale (in Newton)

da parte della terra di 1

da parte della luna $3\cdot 10^{-6} \approx 10^{-6}$

da parte del sole $6\cdot 10^{-4} \approx 10^{-3}$

Quindi si ha che l'attrazione gravitazionale di un corpo sulla Terra da parte del sole è circa 200 volte più grande di quella esercitata dalla luna.

Come ordini di grandezza potremo dire che la luna esercita un milionesimo della forza esercitata dalla Terra, mentre il sole esercita un millesimo della forza esercitata dalla Terra.

13.8 Una sfera di massa 5.0 kg **è posta sul piatto di una bilancia a bracci uguali in equilibrio. Una sfera di massa maggiore** ($5.8\cdot 10^3$ kg) **viene fatta rotolare finché si porta al di sotto della prima con i loro centri a distanza** 0.50 m. **Quale massa deve essere posta sull'altro piatto della bilancia per riportarla in equilibrio? Si assuma** g = 9.8 m/s^2**. Questo metodo è stato usato da G. von Jolly nel secolo** XIX **per determinare il valore della costante gravitazionale.**

L'equilibrio della bilancia viene perturbata dalla presenza della sfera grande, di massa M = $5.8\cdot 10^3$ kg posta sotto il piatto contenente la massa m = 5.0 kg, e precisamente la forza gravitazionale F, fra m e M è quella che va compensata aggiungendo sull'altro piatto una massa aggiuntiva tale che il suo peso sia proprio uguale a F.

Pertanto si ha

$$F_{m-M} = G\frac{mM}{d^2} = 6.67\cdot 10^{-11}\frac{5.0\cdot 5.8\cdot 10^3}{(0.5)^2} = 7.74\cdot 10^{-6}\ N$$

tale deve essere la forza peso della massa aggiuntiva M' = F/g = $0.79\cdot 10^{-6}$ kg

13.9 Un uomo pesa 70 kgf**. Supponendo che il raggio della Terra si raddoppi, quanto peserebbe (a) se la massa della Terra resta costante, (b) se la densità media della Terra resta costante?**

a) La forza gravitazionale esercitata dalla "Terra" con raggio R = 2 R_T è

$$F = G\frac{mM_T}{(2R_T)^2} = 6.67\cdot 10^{-11}\frac{70\cdot 5.98\cdot 10^{24}}{(2\cdot 6.37\cdot 10^6)^2} = 172\,N$$

il suo peso è P ≡ F = mg dunque la massa vale m = 172/9.8 = 17.5 kg

b) Se la densità resta costante la massa della erra sarebbe $M_T' = \rho_T V_T'$ con

$V_T' = {}^4/_3\,\pi(2R_T)^3 = {}^4/_3\,\pi(2\cdot 6.37\cdot 10^6)^3 = 8.657\cdot 10^{21}$ m^3

$M_T' = 5.51\cdot 10^3\cdot 8.657\cdot 10^{21} = 47.7\cdot 10^{24}$ kg

$$F = G\frac{mM_T'}{(2R_T)^2} = 6.67\cdot 10^{-11}\frac{70\cdot 8.657\cdot 10^{21}}{(2\cdot 6.37\cdot 10^6)^2} = 1376\,N$$

Allora l'uomo avrebbe una massa di m = F/g = 1376/9.8 = 140 kg

13.10 Calcolare l'accelerazione di gravità sulla superficie del sole sapendo che il suo raggio è 110 **volte quello della Terra e che la sua massa è circa** 330.000 **volte quella terrestre. Si ripeta il calcolo per Venere, Giove e per la Luna.**

Per il sole si ha

$R_S = 110\ R_T = 7.007\cdot 10^8$ m

$M_S = 330000\ M_T = 1.97\cdot 10^{30}$ kg

L'accelerazione di gravità vale

$g_{sole} = G\ M_S/R_S^2 = 6.67\cdot 10^{-11}\cdot 1.97\cdot 10^{30}/(7.007\cdot 10^8)^2 = 270$ m/s$^2 \approx 27\ g_{terra}$

Con i dati della tabella 1 si ha

$g_{venere} = G\ M_V/R_V^2 = 8.2$ m/s$^2 \approx g_{terra}$

$g_{giove} = 26$ m/s$^2 \approx 2.6\ g_{terra}$

$g_{luna} = 1.6$ m/s$^2 \approx 0.2\ g_{terra}$

13.11 Un uomo pesa 110 kgf**. Calcolare quanto peserebbe sulla superficie del sole e su quella della luna. Quale dovrebbe essere la sua massa nei due luoghi?**

Per la definizione stessa di kilogrammo-forza si ha che la massa dell'uomo vale m = 110 kg

Sul sole l'uomo peserebbe $P_S = m\ g_{sole} = 110\cdot 270 = 29700$ N = 3000 kgf

Sulla luna l'uomo peserebbe $P_S = m\ g_{luna} = 110\cdot 1.6 = 176$ N = 18 kgf

(avendo usato le accelerazioni di gravità trovate nel problema precedente).

13.12 Un uomo pesa 80 kgf **al livello delle masse. Calcolarne la massa e il peso a** 8000 m **sul livello del mare.**

Per la definizione stessa di kilogrammo-forza si ha che la massa dell'uomo vale m = 80 kg

Sul livello del mare la forza gravitazionale che la Terra esercita sull'uomo è

$F = G\ mM/R_T^2 = 6.67\cdot 10^{-11}\ (80\cdot 5.98\cdot 10^{24})/(6.37\cdot 10^6)^2 = 786$ N

Mentre ad altezza $h = 8\cdot 10^3$ m vale

$F = G\, mM/(R_T + h)^2 = 6.67 \cdot 10^{-11}\, (80 \cdot 5.98 \cdot 10^{24})/(6.37 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^3)^2 = 784$ N
Quindi la forza diminuisce di 2 N.

13.13 Dai dati della Tabella 13-1 per i raggi e i periodi del moto orbitale dei pianeti, calcolare la massa del sole.

Supponendo che il pianeta di massa m orbiti intorno al sole, (ma il discorso vale in generale per un corpo che orbita intorno ad un altro corpo) di massa M_S con un periodo P su una traiettoria circolare di raggio R, la forza gravitazionale a cui è sottoposto è

$F = G\, mM_S/R^2$ ma come sappiamo se un corpo si muove su una traiettoria circolare dovrà essere sottoposto ad una accelerazione di tipo centripeta che vale v^2/R, dunque possiamo scrivere,

$F = G\, mM_S/R^2 = m\, v^2/R = m\, \omega^2 R = m\, (2\pi/P)^2 R = m\, R\, 4\pi^2/P^2$ da cui

$M_S = 4\pi^2 R^3/GP^2$

Utilizzando i dati della Tab. A-7 si ha

Usando i dati di Venere:

$M_S = 4\pi^2 R^3/GP^2 = 4\pi^2\, (1.08 \cdot 10^{11})^3/[(6.67 \cdot 10^{-11})\, (1.94 \cdot 10^7)^2] = 1.98 \cdot 10^{30}$ kg

Usando i dati della Terra:

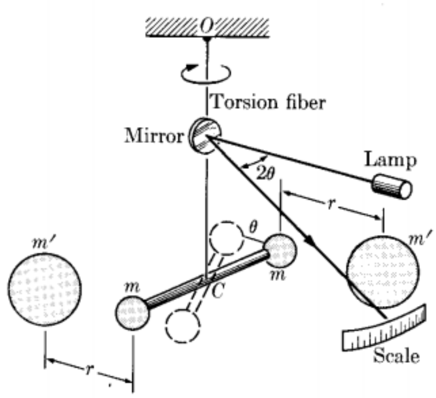
$M_S = 4\pi^2 R^3/GP^2 = 4\pi^2\, (1.49 \cdot 10^{11})^3/[(6.67 \cdot 10^{-11})\, (3.16 \cdot 10^7)^2] = 1.96 \cdot 10^{30}$ kg

Usando i dati di Giove:

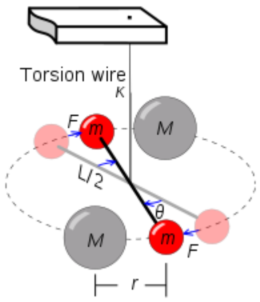
$M_S = 4\pi^2 R^3/GP^2 = 4\pi^2\, (7.78 \cdot 10^{11})^3/[(6.67 \cdot 10^{-11})\, (3.74 \cdot 10^8)^2] = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg

La piccola differenza (dell'ordine del 0.6%) è dovuta al fatto che i dati orbitali non sono ovviamente valori esatti ma sono affetti da errori.

13.14 In un esperimento di Cavendish (vedi figura seguente), le due masse piccole sono di 10.0 g **e l'asta (di massa trascurabile) è lunga** 0.50 m**. Il periodo delle oscillazioni in torsione di questo sistema è di** 770 s**. Le due masse grandi sono di** 10.0 kg **ciascuna e sono disposte in modo tale che la distanza tra i centri delle sfere grandi è di quelle piccole sia di** 0.10 m**. Trovare la deflessione angolare dell'asta.**



Dalla legge di Hooke, il momento sul filo di torsione è proporzionale all'angolo di deviazione della bilancia. Il momento è $k\theta$ dove k è il coefficiente di torsione del filo. Tuttavia, il momento può anche essere scritto come prodotto delle forze di attrazione tra le sfere e la distanza dal filo di sospensione. Poiché ci sono due coppie di sfere, ciascuna sottoposta una forza *F* ad una distanza L/2 dall'asse della bilancia, il momento è *LF*. Uguagliando le due formule per il momento meccanico, si ottiene: $k\theta = LF$



Ma la forza altro non è che la forza di interazione gravitazionale, per cui si ha

$k\theta = L\ G\ mM/r^2$ (1)

L'eq. del moto del pendolo di torsione è $M = I\ d\omega/dt$, Per la legge di Hooke il momento vale

$M = -\ k\theta$. per cui abbiamo la seguente eq. differenziale

$I\ d\omega/dt = -\ k\theta$ o anche (essendo $\omega = d\theta/dt$)

$d^2\theta/dt^2 + (k/I)\ \theta = 0$ da cui come noto si ricava il periodo che vale $P = 2\pi\ (I/k)^{1/2}$,essendo noto P ed essendo il momento di inerzia $I = ½\ mL^2 = ½\ 10^{-2}\cdot 0.5^2 = 12.5\cdot 10^{-4}$ kg m^2 il coefficiente di torsione vale

$k = 4\pi^2 I/P^2 = 4\pi^2(12.5\cdot 10^{-4})/770^2 = 8.3\cdot 10^{-8}$

Dunque sfruttando la (1) troviamo il valore della deflessione angolare dell'asta:

$\theta = [LG\ mM/r^2]/k = [0.5\cdot 6.67\cdot 10^{-11}\cdot 10^{-2}\cdot 10/0.1^2]/8.3\cdot 10^{-8} = 0.004$ rad

13.15 Di quanto si dovrebbe salire al di sopra della superficie terrestre perché l'accelerazione di gravità cambi dell'1%? Di quanto si dovrebbe scendere all'interno della Terra per osservare la stessa variazione?

Usando il seguente valore medio dell'accelerazione di gravità (sulla superficie terrestre) $g = 9.81$ m/s^2 una sua variazione (diminuzione) dell'1% significa che per quella data altezza h dalla superficie terrestre g deve valere $g' = 9.81 - 0.01\cdot 9.81 = 9.71$ m/s^2.

Sappiamo che sulla superficie terrestre (per un corpo di massa m) vale la relazione

$mg = G\ mM_S/R_T^2$ ossia

$g = G\ M_T/R_T^2$ (1)

mentre ad una altezza h dalla superficie terrestre si ha

$g' = G\ M_T/(R_T + h)^2$ da cui

$(R_T + h)^2 = G\ M_T/g' = 6.67\cdot10^{-11}\cdot5.98\cdot10^{24}/9.71 = 4.1078\cdot10^{13}$ e quindi

$h = (4.1078\cdot10^{13})^{1/2} - R_T = 6.41\cdot10^6 - 6.37\cdot10^6 = 0.04\cdot10^6$ m = 40 km

Trattazione più formale.

Partiamo dalla relazione

$$g(h) = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2} = G\frac{M_T}{R_T^2(1 + h/R_T)^2} = G\frac{M_T}{R_T^2}\frac{1}{(1 + h/R_T)^2} = g\frac{1}{(1 + h/R_T)^2} = g(1 + h/R_T)^{-2}$$

ora se h << R_T il termine fra parentesi può essere approssimato ricorrendo allo sviluppo binomiale, $(R_T + h)^{-2} = [R\ (1 + (h/R)]^{-2} = R^{-2}\ (1 + h/R)^{-2} = R^{-2}\ (1 - 2\ h/R + \ldots)$ avendosi

$$g(h) = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2} = G\frac{M_T}{{R_T}^2}(1 - 2\frac{h}{R})$$ che inforza della (1) diventa

$$g(h) = g\,(1 - 2\frac{h}{R}) \qquad (2)$$

Se si vuole che la differenza fra g e g(h) sia dell'1% cioè se si vuole che

$\Delta g = g - g(h) = 1\%\ g = 0.01\cdot9.81 = 0.0981$ l'altezza h varrà

$$h = \frac{R_T}{2g}\Delta g \qquad (3)$$

Numericamente

$h = (6.37\cdot10^6/2\cdot9.81)\ 0.0981 = 31850\ \text{m} \approx 32$ km

Sfruttando questa relazione è possibile scrivere la seguente tabellina esemplificativa:

Altitudine	Accelerazione
0	9.81
1	9.797
4	9.788
8	9.775
16	9.751
32	9.702
100	9.493

Se invece scendiamo all'interno (a distanza $r = (R_T - h)$ dal centro della Terra) della Terra l'espressione della forza gravitazione su un corpo di massa m, come noto dalla teoria, è

$F = G\ mM_T\ r/R_T^3 = mg$ da cui

$$g(h) = G\frac{(R_T - h)M_T}{R_T^3} = \frac{GM_T}{R_T^2}(1 - \frac{h}{R})$$ ed essendo $g = GM_T/R_T^2$ si ha

$$g(h) = g\,(1 - \frac{h}{R}) \qquad (4)$$

Se si vuole che la differenza fra g e g(h) sia dell'1% cioè se si vuole che

$\Delta g = g - g(h) = 1\%\ g = 0.01\cdot9.81 = 0.0981$ l'altezza h varrà

$$h = \frac{R_T}{g}\Delta g \qquad (5)$$

Numericamente

h = (6.37·10^6/9.81) 0.0981 = 63700 m ≈ 64 km

Da cui si vede che per avere la stessa variazione percentuale di g andando verso il centro della Terra anziché allontanandosene occorre percorrere una distanza doppia.

Infine in aggiunta calcoliamo l'altezza a cui bisogna andare per dimezzare il proprio peso.

Vogliamo che sia P' = P/2 ossia g' = g/2

Dalla relazione $g(h) = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$ si ha $g/2 = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$ da cui

$$h = \sqrt{\frac{2GM_T}{g}} - R_T = 2240\ km$$

Mentre se volessimo sapere quanto peserebbe un uomo (di massa 100 kg) in cima al monte Everest (h = 8.848 km) si avrebbe

$$g_{everest} = G\frac{M_T}{(R_T^2 + h)^2} = 6.67\cdot 10^{-11}\frac{6.37\cdot 10^{24}}{((6370 + 8.848)\cdot 10^3)^2} = 9.79\ m/s^2$$

P = $mg_{everest}$ = 100·9.79 = 979 N

Mentre sulla superficie terrestre si ha P' = m g = 100·9.91 = 981 N

Quindi il suo peso varia di soli 2 N