Giancarlo Buccella

Esercizi svolti di Fisica 2

tutti i problemi proposti ma non risolti nel testo

"Problemi di Fisica Generale:

Elettricità e Magnetismo"

Sergio Rosati e Lionel Lovitch

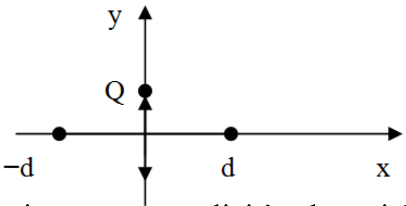
Casa Editrice Ambrosiana **(1ª ed. 1981)**

Indice

1. Il campo elettrostatico e il potenziale elettrostatico nel vuoto

Prob. 1.3

Due cariche uguali, $q_1=q_2=1pC$**, vengono tenute ferme nel vuoto nei punti dell'asse** x **di ascisse** $x_1=d=10^{-2}$ m **e** $x_2=$ d, **rispettivamente. Una particella di massa** m=10 g **e carica** q= 1 μC **oscilla lungo l'asse** y **sotto l'azione delle forze dovute alle cariche** q_1 **e** q_2**: quanto vale il periodo delle piccole oscillazioni?**



Chiamiamo per semplicità q le cariche fisse sull'asse x e Q quella mobile costretta a muoversi lungo y, le componenti x delle due forze elettrostatiche a cui è sottoposta Q si elidono avendo versi contrari ed identico modulo, sopravvivono solo le componeneti y, per cui la forza complessiva su Q vale

$$F = 2\ F_y = 2\ k\ qQ/R^2)\cos\alpha$$

dove α è l'angolo di F con l'asse y, e dove abbiamo introdotto la costante k

$$\boldsymbol{k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}$$

Questa notazione sarà mantenuta per tutto il testo.

inoltre con R abbiamo indicato la distanza fra Q e q e vale evidentemente y = R cos α ossia cos α = y/R dunque

$$F = (2kqQ/R^3)\ y$$

se ora teniamo conto che essendo lo spostamento y molto piccolo rispetto a d di ha che R coincide praticamente con d, dunque

$$F = (2kqQ/d^3)\ y$$

e se ora scriviamo la seconda Legge della dinamica si ha (tenendo conto del verso negativo di F)

$$m\ \ddot{y} = \quad (2kqQ/d^3)\ y$$

che possiamo scrivere anche così

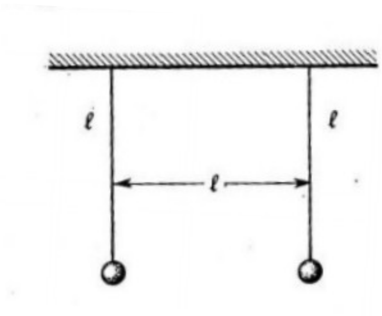
$$\ddot{y} = \quad \omega^2\ y$$

che non è altro che l'eq. dell'oscillatore armonico che come noto descrive un moto armonico con periodo T = 2 π / ω dunque

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{md^3}{2kqQ}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 d^3}{qQ}} = 4.7s$$

Prob. 1.4

Due sferette di massa $M_1=M_2=M=30$ g **sono appese a due fili di uguale lunghezza** $\ell=40$ cm **posti a distanza** ℓ**; le due sferette possiedono cariche opposte** Q **e** – Q **e vengono lasciate libere con velocità nulle nella posizione indicata in figura. Qual'è il valore minimo di** Q **che permette alle due palline di arrivare ad una distanza relativa** $\ell/2$ **?**



Oltre che risolvere l'esercizio con le considerazioni che fa il testo sul lavoro svolto dalle forze coinvolte si può considerare l'equilibrio meccanico finale.
Il sistema in esame è simmetrico: è sufficiente studiare il comportamento di una sola pallina e scrivere la condizione di equilibrio utilizzando una sola delle equazioni cardinali della statica poiché si tratta di un corpo vincolato. Utilizziamo perciò la condizione di annummento della somma dei momenti ad esempio sulla pallina di destra.

Le forze agenti sono la forza peso la forza elettrostatica e la tensione della fune

$$\mathbf{P} = mg\,\mathbf{j};$$
$$\mathbf{F} = 2\,q^2/(\ell/2)^2\,\mathbf{i}$$
$$\mathbf{T} = T_x\,\mathbf{i} + T_y\,\mathbf{j}$$

Scegliendo come polo il punto si sospensione del filo , la tensione del filo non compare nell'equazione perchè la sua retta di azione passa per il polo, scegliendo il senso orario come positivo, si ha

$$mg\,\ell\,\sin\alpha = (kq^2/(\ell/2)^2)\,\ell\cos\alpha$$

Considerando che lo spostamento lungo x della pallina è $\ell/4$ osservando il triangolo rettangolo con base $\ell/4$ ed ipotenusa ℓ si ha $\ell/4 = \ell\sin\alpha$ e quindi $\sin\alpha = ¼$ e $\cos\alpha = (1\quad 1/16)^{1/2}$
dunque

$$mg/4 = k\,4\,q^2/\ell^2\,(15/16)^{1/2} \quad \text{da cui}$$

$$q = \sqrt{\frac{mg}{16k}\ell^2\sqrt{\frac{16}{15}}} = 0.58\mu C$$

Prob. 1.6

Una particella carica di massa m=1 g **si trova in condizioni di equilibrio in una certa posizione sotto l'azione del suo peso e della forza dovuta ad un campo elettrico che nella posizione in questione ha intensità** $E=10^4$ V/m**; qual è la carica della particella?**

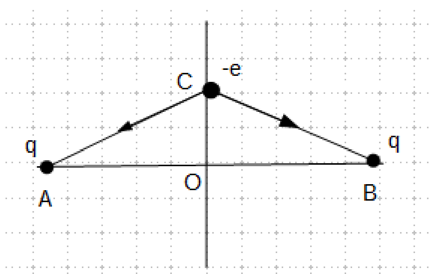
Evidentemente all'equilibrio la forza peso è uguale ed opposta alla forza dovuta al campo, ergo

$mg = qE$ da cui

$q = mg/E = 0.98\ \mu C$

Prob. 1.7

Nei punti A **e** B **distanti tra loro** $d=3\ 10^{-10}$ m **sono fissate due cariche uguali** q=2e ($e=1.6\ 10^{-19}$ C)**. Un elettrone descrive nel piano assiale del segmento** AB **una circonferenza di raggio** $r=2\ 10^{-11}$ m**. Si calcoli il modulo** v **della velocità dell'elettrone ed il periodo del moto.**



La risultante sull'elettrone è $F_y = (2kqe/CB^2) \cos \alpha$

ma $CB^2 = R^2 + (d/2)^2$ e $\cos \alpha = R/CB$

Dunque

$$F_y = \frac{2kqeR}{(R^2 + (d/2)^2)^{3/2}} = m_e \omega^2 R$$

da cui

$$v = \omega R = \sqrt{\frac{2kqeR^2}{m_e (R^2 + (d/2)^2)^{3/2}}} = 3.4 \cdot 10^5\ m/s$$

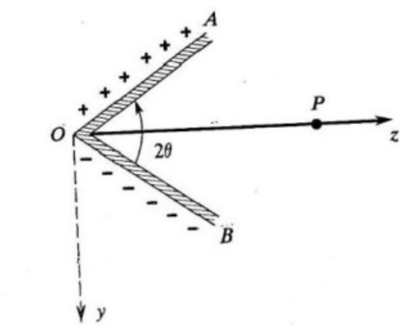
ed il periodo sarà

$T = 2\pi/\omega = 3.7\ 10^{-16}$s

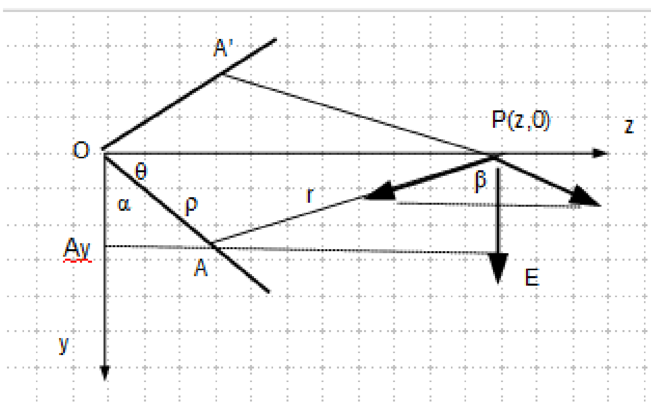
Prob. 1.9

Una carica Q **positiva e una carica** Q **sono distribuite uniformemente lungo i segmenti** OA **e** OB**, entrambi li lunghezza** ℓ, **aventi l'estremo** O **in comune e formanti tra loro un angolo** 2θ**.**

a) **Si determini l'espressione del campo elettrico in un punto** P **della bisettrice interna dell'angolo** AOB **e distante** z **da** O**.**
b) **Si calcoli il valore dell'intensità del campo nel caso** Q=10 nC**,** ℓ=42 cm, θ=π/4 **e** z=70 cm.
c) **Nel caso** z >> ℓ **si calcoli il primo termine non nullo dello sviluppo in serie di** 1/z **dell'espressione ottenuta in** (a)**.**



a)



Il campo elettrico infinitesimo in P è il doppio della componente verticale poiché le componenti orizzontali si elidono a vicenda per ovvie ragioni di simmetria.

$dE \equiv dE_y = 2k\, dq / r^2$ dove $r \equiv AP$

introducendo un SR polare (yz), con raggio vettore **ρ**(OA) con A punto corrente sul segmento della sbarretta (0,L) ed anomalia α si ha

$dq = \lambda\, d\rho$ dunque

$$dE = (2k\, \lambda\, d\rho / r^2) \cos \beta \qquad (1)$$

a questo punto il problema è semplicemente un problema di calcolo integrale.

Occorre esprimere E in funzione di una sola variabile di integrazione che evidenmente è ρ, considerando il triangolo qualunque

OAP si ha

$r^2 = z^2 + \rho^2 \quad 2\rho z \cos \theta$

Essendo 90° $\alpha = \theta$ possiamo scrivere $\cos\theta = \sin\alpha$, avendosi

$r^2 = z^2 + \rho^2 \quad 2\rho z \sin\alpha$

Dalla figura considerando il segmento A_y emerge che vale la relazione $\rho \cos\alpha = r \cos\beta$, cioè $\cos\beta = (\rho/r) \cos\alpha$ quindi sostituendo nella (1) si ha

$$dE = (2k\,\lambda\, d\rho / r^2)\,(\rho/r) \cos\alpha$$

$$dE = 2k\,\lambda \cos\alpha\;\; \rho\, d\rho / r^3$$ e sostituendo l'espressione di r si ha

$$dE = 2k\,\lambda \cos\alpha\;\; \rho\, d\rho / (z^2 + \rho^2 \quad 2\rho z \sin\alpha)^{3/2}$$

pertanto abbiamo finalmente un'espressione di E calcolabile, espresso cioè in un'unica variabile che è ρ:

$$E = k\lambda \cos\alpha \int_0^L \frac{\rho d\rho}{(z^2 + \rho^2 - 2z\rho \sin\alpha)^{3/2}}$$

Calcoliamo dunque l'integrale riarrangiando il denominatore in questo modo

$$z^2 + \rho^2 \quad 2z\,\rho \sin\alpha + z^2 \sin^2\alpha \quad z^2 \sin^2\alpha = (\rho \quad z \sin\alpha)^2 + z^2 \cos^2\alpha$$

$$I = \int_0^L \frac{\rho d\rho}{((\rho - z\sin\alpha)^2 + z^2\cos^2\alpha)^{3/2}} = \frac{1}{(z\cos\alpha)^3} \int_0^L \frac{\rho d\rho}{((\rho - z\sin\alpha)/z\cos\alpha)^2 + 1)^{3/2}}$$

Operiamo ora il seguente cambio di variabile

$s = \rho \quad z \sin\alpha / z \cos\alpha$ e $\rho = z\, s \cos\alpha + z \sin\alpha$

$ds = d\rho / \cos\alpha$

$d\rho = z \cos\alpha\, ds$

l'integrale diventa

$$I = \frac{z\cos\alpha}{(z\cos\alpha)^3} \int_0^L \frac{z\,s\cos\alpha + z\sin\alpha}{(s^2+1)^{3/2}} ds = \frac{1}{(z\cos\alpha)^2}\left[z\cos\alpha \int_0^L \frac{s}{(s^2+1)^{3/2}} ds + z\sin\alpha \int_0^L \frac{ds}{(s^2+1)^{3/2}} \right]$$

$$= \frac{1}{(z\cos\alpha)^2}\left[z\cos\alpha\, I_1 + z\sin\alpha\, I_2 \right]$$

per il calcolo di I_1 e di I_2 si veda l'appendice di questo problema.

$$I = \frac{1}{(z\cos\alpha)^2}\left[-z\cos\alpha \frac{1}{(s^2+1)^{1/2}} + z\sin\alpha \frac{s}{(s^2+1)^{1/2}} \right] = \frac{1}{(z\cos\alpha)^2}\left[\frac{sz\sin\alpha - z\cos\alpha}{(s^2+1)^{1/2}} \right]$$

ritornando alla variabile ρ

$$I = \frac{1}{(z\cos\alpha)^2}\left[\frac{\frac{\rho - z\sin\alpha}{z\cos\alpha} z\sin\alpha - z\cos\alpha}{\left(\frac{\rho^2 - 2z\rho\sin\alpha + z^2\sin^2\alpha}{z^2\cos^2\alpha} + 1\right)^{1/2}} \right] = \frac{1}{z\cos^2\alpha}\left[\frac{\rho\sin\alpha - z}{(\rho^2 - 2z\rho\sin\alpha + z^2)^{1/2}} \right]$$

Ora ricordiamoci degli estremi di integrazione della variabile ρ, fra 0 ed L

$$\left[\frac{\rho\sin\alpha - z}{(\rho^2 - 2z\rho\sin\alpha + z^2)^{1/2}}\right]_0^L = \frac{L\sin\alpha - z}{(L^2 - 2Lz\rho\sin\alpha + z^2)^{1/2}} - \frac{-z}{(z^2)^{1/2}}$$

E ricordando che cos α = sin θ infine si ha

$$E = \frac{2k\lambda}{z\sin\theta}\left[1 - \frac{z - L\cos\theta}{\sqrt{L^2 - 2zL\cos\theta + z^2}}\right]$$

b) Sostituendo i valori numerici si ha E = 169 V/m

c) In prima approssimazione, per grandi distanze dal sistema di cariche dovremo aspettarci che il campo vada come $1/z^3$, ossia come il campo di un dipolo, essendo il nostro sistema neutro.
Facciamo allora uno sviluppo in serie con l'ipotesi che L/z << 1.
A tal uopo riscriviamo l'espressione del campo elettrico fra parentisi

$$\left[1 - \frac{z(1-(L/z)\cos\theta}{z\sqrt{1+(L/z)^2 - 2(L/z)\cos\theta}}\right] =$$

$$= \left[1 - \frac{(1-(L/z)\cos\theta}{\sqrt{1+(L/z)^2 - 2(L/z)\cos\theta}}\right] = \left[1-(1-(L/z)\cos\theta)(1+(L/z)^2 - 2(L/z)\cos\theta)^{-1/2}\right] \qquad \text{(a)}$$

sfruttando lo sviluppo di Taylor e ricordando che vale
$(1+x)^k = 1 + kx + ½\, k\, (k-1)\, x^2 + \ldots$ si ha (nel nostro caso k = ½ e x = $(L/z)^2$ 2(L/z)cos θ)

$$\left[(1+\left[(L/z)^2 - 2(L/z)\cos\theta\right]\right]^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{L}{z}\right)^2 - 2\frac{L}{z}\cos\theta\right] + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2}\left[\left(\frac{L}{z}\right)^2 - 2\frac{L}{z}\cos\theta\right]^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{z}\right)^2 + \left(\frac{L}{z}\right)\cos\theta + \frac{3}{8}\left[\left(\frac{L}{z}\right)^4 - 4\left(\frac{L}{z}\right)^3\cos\theta + 4\left(\frac{L}{z}\right)^2\cos^2\theta\right] =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{z}\right)^2 + \left(\frac{L}{z}\right)\cos\theta + \frac{3}{8}\left(\frac{L}{z}\right)^4 - \frac{3}{2}\left(\frac{L}{z}\right)^3\cos\theta + \frac{3}{2}\left(\frac{L}{z}\right)^2\cos^2\theta =$$

Trascurando i termini con potenze superiori a 2 si ha

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{z}\right)^2 + \left(\frac{L}{z}\right)\cos\theta + \frac{3}{2}\left(\frac{L}{z}\right)^2\cos^2\theta$$

Sostituendo questo svuluppo nella (a) abbiamo

$$\left[1-(1-(L/z)\cos\theta)(1+(L/z)^2-2(L/z)\cos\theta)^{-1/2}\right]=$$

$$\left[1-(1-(L/z)\cos\theta)(1-\frac{1}{2}\left(\frac{L}{z}\right)^2+\left(\frac{L}{z}\right)\cos\theta+\frac{3}{2}\left(\frac{L}{z}\right)^2\cos^2\theta)\right]=$$

$$\left[1-(1-\frac{1}{2}\left(\frac{L}{z}\right)^2+\frac{L}{z}\cos\theta+\frac{3}{2}\left(\frac{L}{z}\right)^2\cos^2\theta-\frac{L}{z}\cos\theta+\frac{1}{2}\left(\frac{L}{z}\right)^3\cos\theta-\left(\frac{L}{z}\right)^2\cos^2\theta-\frac{3}{2}\left(\frac{L}{z}\right)^3\cos^3\theta\right]$$

Trascurando al solito i temini con potenze maggiori di 2 si ha

$$\left[1-1+\frac{1}{2}\left(\frac{L}{z}\right)^2-\frac{3}{2}\left(\frac{L}{z}\right)^2\cos^2\theta+\left(\frac{L}{z}\right)^2\cos^2\theta\right]=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{L}{z}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{L}{z}\right)^2\cos^2\theta\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{L}{z}\right)^2\sin^2\theta$$

Quindi ritornando “a bomba”

$$E=\frac{2k\lambda}{z\sin\theta}\left[1-\frac{z-L\cos\theta}{\sqrt{L^2-2zL\cos\theta+z^2}}\right]=\frac{2k\lambda}{z\sin\theta}\left[1-(1-(L/z)\cos\theta)(1+(L/z)^2-2(L/z)\cos\theta)^{-1/2}\right]=$$

$$\mathrm{E}=\frac{2k\lambda}{z\sin\theta}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{L}{z}\right)^2\sin^2\theta\right]=\frac{k\lambda L^2}{z^3}\sin\theta$$

Quindi come era da aspettarsi il campo decresce con la terza potenza della distanza, ossia come il campo di un dipolo: $\mathrm{E}\approx z^{-3}$

Appendice (calcolo degli integrali):

$$I_1=\int\frac{s}{(s^2+1)^{3/2}}ds$$ poniamo $t=1+s^2$ $dt=2sds$ avendosi

$$I_1=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^{3/2}}=\frac{1}{2}\frac{t^{-(3/2)+1}}{-(3/2)+1}=\frac{1}{2}\frac{t^{-1/2}}{-1/2}=-\frac{1}{t^{1/2}}$$ e cioè

$$I_1=\int\frac{s}{(s^2+1)^{3/2}}ds=-\frac{1}{\sqrt{(s^2+1)}}$$

$$I_2=\int\frac{1}{(s^2+1)^{3/2}}ds$$ poniamo s = senh t ds = cosh t dt l’integrale divernta

$$I_2=\int\frac{\cosh t}{(\sinh^2 t+1)^{3/2}}ds=\int\frac{\cosh t}{(\cosh^2 t)^{3/2}}ds=\int\frac{1}{\cosh^2 t}ds=\tanh t$$

ma avendosi $\tanh t=\frac{\sinh t}{\cosh t}=\frac{s}{(1+\sinh^2 t)^{1/2}}=\frac{s}{(1+s^2)^{1/2}}$ si arriva al seguente valore di I_2

$$I_2=\frac{s}{\sqrt{(s^2+1)}}$$

Prob. 1.10

Una particella carica di massa m=9.11 10^{-31} kg **e carica** q=1.6 10^{-19} C**, posta con velocità nulla in un punto di un campo elettrico uniforme e costante, in un tempo** $\tau=10^{-8}$ s **acquista una velocità** $v=10^7$ m/s**: si calcoli l'intensità del campo elettrico E.**

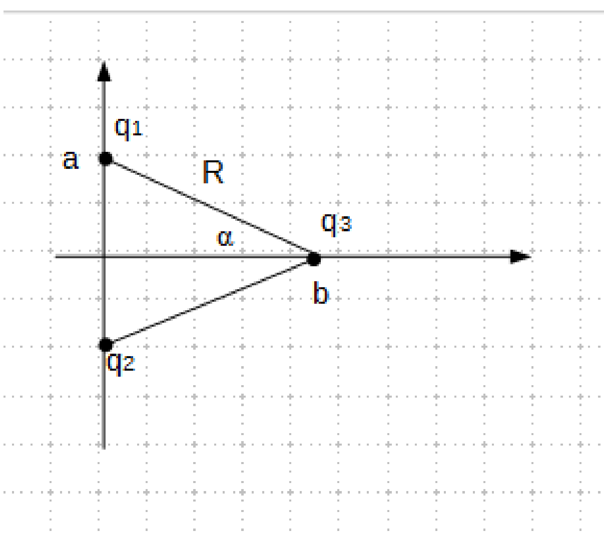
La forza che agisce sulla carica è F = qE dunque

$$F \equiv ma = qE$$

$$E = \frac{ma}{q} = \frac{m}{q}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{9.11 \cdot 10^{-31}}{1.6 \cdot 10^{-19}}\frac{10^{7}}{10^{-8}} = 5.7 \cdot 10^{3} V/m$$

Prob. 1.11

Due cariche puntiformi uguali, $q_1=q_2=10^{-10}$ C, **sono poste nel vuoto nei punti** P_1=(0, 0, 1m) **e** P_2 = (0, -0.1m) **nel piano** xy. **Si calcoli la forza F risentita da una carica** q_3= 10^{-12} C **posta nel punto** P_3 = (0.2m, 0) **e l'intensità del campo elettrico E e del potenziale elettrostatico** V **nel punto** P_4 = (-0.2m, 0).



Dalla figura si vede che b = R cos α cioè cos α = b/R ed anche $R^2 = a^2 + b^2$

L'espresione del campo elettrico su q_3 da parte di q_1 è

$$\boldsymbol{F}_{1,3} = -k\frac{q_1 q_3}{R^2}\boldsymbol{u}_R = -k\frac{q_1 q_3}{(P_1P_3)^2}\frac{\overline{P_1P_3}}{P_1P_3}$$

$$E_z dy - E_y dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

$$E_x dz - E_z dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{E_x} = \frac{dz}{E_z}$$

$$E_x dy - E_y dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}$$

da queste tre relazioni si ricava alfine l'equazione delle linee di forza

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

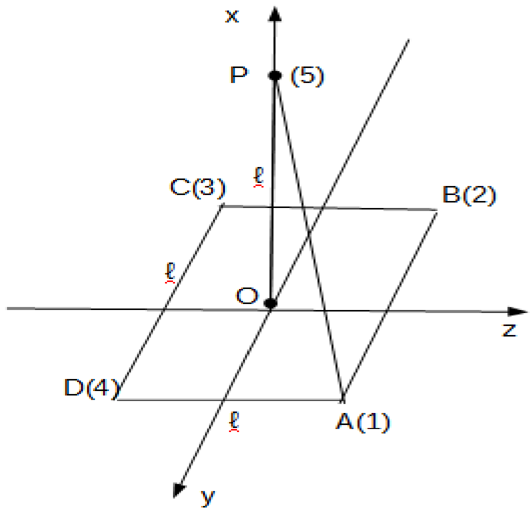
Prob. complementare N. 2

Quattro protoni ($e=1.6\ 10^{-19}$ C, $m_p=1.7\ 10^{-27}$ kg) **sono disposti ai vertici di un quadrato di lato** $\ell=2\ 10^{-9}$ m**. Un altro protone si trova inizialmente sulla perpendicolare al quadrato passante per il centro, ad una distanza di** $2\ 10^{-9}$ m **dal centro stesso. Calcolare**

a) **la minima velocità iniziale che il quinto protone deve avere per raggiungere il centro del quadrato;**
b) **la sua accelelerazione iniziale e finale;**
c) **rappresentare graficamente l'energia potenziale del protone in funzione della distanza dal centro del quadrato;**
d) **descrivere il moto nei casi in cui l'energia sia maggiore o minore di quella calcolata in a).**

a)

Si osservi la seguente figura



Il lato del quadrato è ℓ, perciò il segmento AO è la sua diagonale che vale AO = ℓ√2/2.

La distanza fra il quinto protone ed i protoni posti ai vertici del quadrato vale

$$AP = BP = CP = DP = \sqrt{\ell^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\ell$$

L'energia potenziale del protone 5 vale

$E_p(P) = e\ V(P) = e\ 4\ V_1(P) = 4e\ (k\ e/AP)$ da cui abbiamo

$$E_p(P) = 4k\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{e^2}{\ell}$$

Nell'avvicinarsi al punto O, il quinto protone viene respinto sempre più intensamente dagli altri quattro e perde perciò velocità, ossia energia cinetica, acquistando di converso energia potenziale elettrostatica. Tale energia nel punto O vale

$$E_p(O) = 4eV_1(O) = 4ke\frac{e}{AO} = 4k\sqrt{2}\frac{e^2}{\ell}$$

Il bilancio energetico per il quinto protone è il seguente

$E_k(P) + E_p(P) = E_k(O) + E_p(O)$

Il problema pone la condizione limite di velocità nulla in O. La minima velocità che il quinto protone deve possedere nel punto P. per riuscire a vincere la repulsione degli altri quattro e raggiungere il punto O, si ottiene scrivendo il bilancio con $E_k\ (O) = 0$, si ha perciò

$E_{k,min}(P) + E_p(P) = E_p(O)$

$E_{k,min}(P) = E_p(O) \quad E_p(P)$

$½\ m\ v_{min}^2 = 4k\ (e^2 / \ell)\ (\sqrt{2} \quad \sqrt{(2/3)})$ da cui

$$v_{min} = k\frac{8e^2}{m\ell}\left(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 1.8\ 10^4 \text{ m/s}$$

b)

La forza risentita dal quinto protone è la somma vettoriale delle forze esercitate su di esso dagli altri quattro protoni.

Nel punto P la forza risultanteè diretta come l'asse x, poiché le componenti delle forze normali a tale asse si elidono a due a due, considerando i quattro protoni a coppie poste agli estremi delle diagonali. Si sommano le componenti delle forze parallele all'asse x.

Abbiamo dunque

$\mathbf{F_P} = 4\ F_{1x}\ \mathbf{i} = 4\ F_1 \cos\theta\ \mathbf{i}$

(dove θ è l'angolo APO)

siccome si ha

$\cos\theta = \ell / AP = (2/3)^{1/2}$ e $F_1 = ke^2/AP^2$

la forza sul quinto protone in P vale

$$\boldsymbol{F}_P = 8k\sqrt{\frac{2}{27}}\frac{e^2}{\ell^2}\boldsymbol{i} = 12.6\quad 10^{-11}\ \mathbf{i}\ \text{N}$$

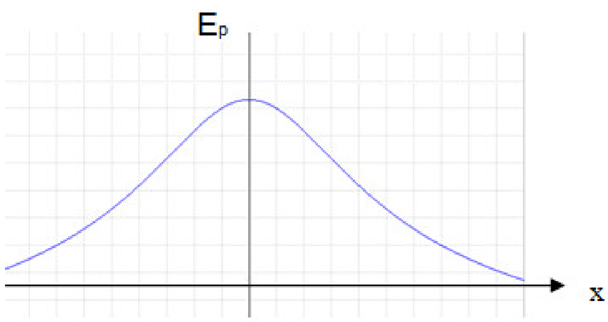
mentre nel punto O la forza è nulla, infatti per evidenti motivi di simmetria le forze esercitate dalle coppie di protoni agli estremi delle diagonali si elidono.
Allora possiamo scrivere l'espressione dell'accelerazione del quinto protone in P ed in O, avendosi
$a_P = F_P / m = 7.5 \ 10^{16}$ m/s^2
$a_O = 0$
c)
Sia x l'ascissa generica del punto P. L'energia potenziale del quinto protone in funzione di x, tenendo condo che ora la distanza AP è funzione di x

$$AP = \sqrt{\left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + \frac{\ell^2}{2}}$$

vale

$$E_p = 4eV_1(x) = 4ek\frac{e}{AP} = 4k\frac{e^2}{\sqrt{x^2 + \frac{\ell^2}{2}}}$$

L'andamento della funzione è qui graficato



Abbiamo un massimo per x = 0 dove E_p vale

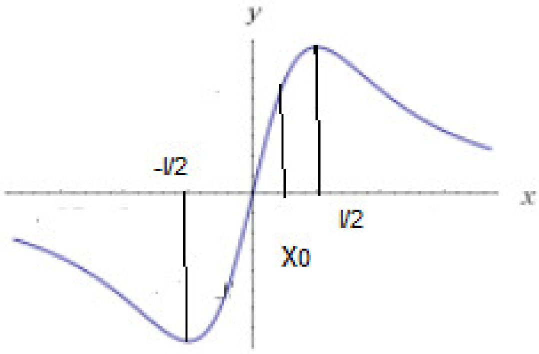
$$E_p(0) = 4k\frac{\sqrt{2}e^2}{\ell}$$

La funzione è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate e tende asintoticamente a zero.
Mentre ha due punti di flessio in $x_F = \pm \frac{1}{2} \ell$, come si vede annullando la derivata seconda.

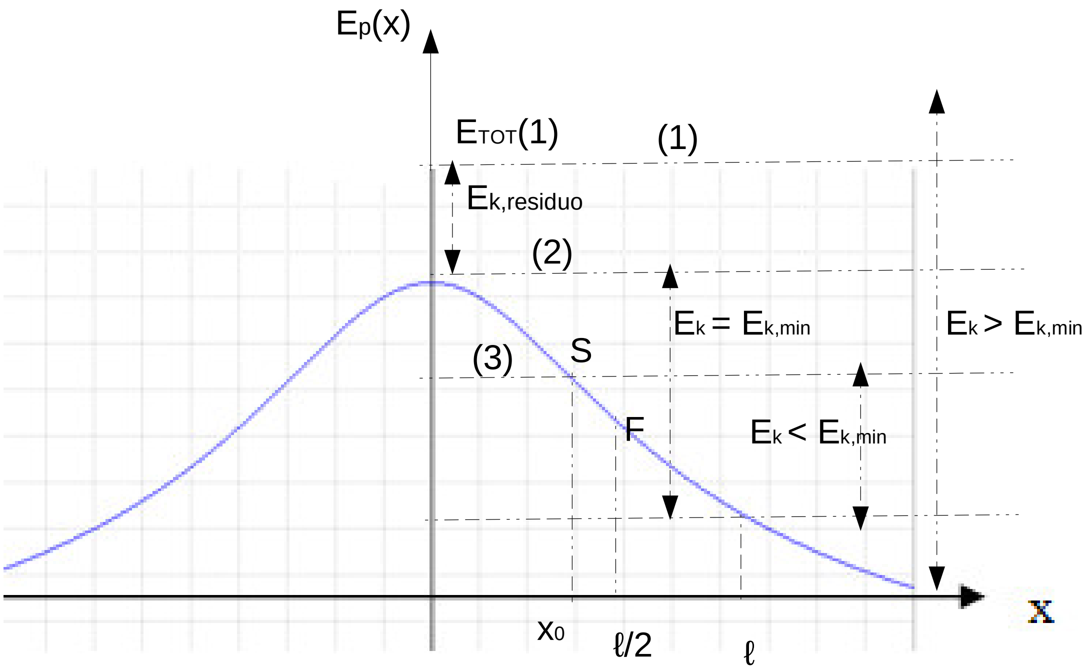
d)

Vediamo ora di capire come avviene il moto dal punto di vista energetico, a tal uopo calcoliamoci l'accelerazione in un punto generico sull'asse x, qundi in un punto P(0,0,x)

$$a_x = \frac{4F_1\cos\theta}{m} = \frac{4}{m}k\frac{e^2}{AP^2}\frac{\ell}{AP} = 4k\frac{e^2 mx}{(x^2 + \frac{1}{2}\ell^2)^{3/2}}$$



Indichiamo ora sul grafico dell'energia potenziale, il livello dell'energia totale della particella per mezzo di linee orizzontali che rappresentino valori diversi dell'energia totale caratteristici di situazioni particolari.



La linea orizzontale indica il livello dell'energia totale e la curva l'energia potenziale: la diffrenza tra ordinata della retta e ordinata della curca per i diversi valori di x, rappresenta l'energia cinetica e dà perciò informazioni sulla velocità della particella.
Esaminiamo dunque le varie possibilità:

1) L'energia totale ha un livello superiore all'energia potenziale massima. La retta orizzontale che rappresenta l'energia totale non ha alcuna intersezione con la curva dell'energia potenziale.

Il protone in $x = 0$ ha un'energia cinetica residua $E_{k,residua}$, segnalata in figura. Ciò significa che nel punto P, in $x = \ell$, ha un'energia cinetica maggiore di quella minima richiesta per raggiungere il punto O, ossia una velocità rivolta verso O tale che $v_p > v_{min}$. Avvicinandosi al punto O il protone rallenta, poiché per $x > 0$ l'accelerazione cui è soggetto ha verso opposto a quello della velocità, quindi raggiunge il punto O con una certa velocità "residua". Riesce così ad attraversare il piano sul quale si trovano gli altri quattro protoni ed a proseguire il suo moto nel verso negativo dell'asse x.

La sua velocità riprende ad aumentare, in valore assoluto, poiché quando il protone passa per O, l'accelerazione cambia verso, si riveda il grafico di a_x.

2) L'energia totale ha un livello pari all'energia potenziale massima. La retta orizzontale che rappresenta l'energia totale è tangente alla curva che rappresenta l'energia potenziale nel suo punto di massimo. Il protone in x = 0 non possiede energia cinetica "residua". Quindi il protone arriva con velocità nulla in O ed ivi rimane fermo con equilibrio instabile in quanto un piccolo spostamento lo allontanerebbe da O sia in un verso che nell'altro, a causa della repulsione degli altri protoni.

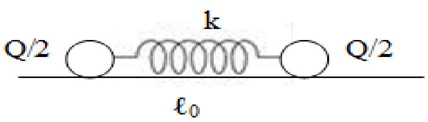
3) L'energia totale ha un livello inferiore all'energia potenziale massima. In P, per $x = \ell$, il protone possiede un'energia cinetica minore dell'energia cinetica minima richiesta per raggiungere il centro del quadrato, $v_p < v_{min}$. La retta dell'energia totale interseca la curva dell'energia potenziale in un punto S di ascissa positiva x_0.

Raggiunto il punto S il protone non possiede più alcuna energia cinetica e ivi si arresta, ma non vi rimane a lungo, infatti in S per $x = x_0$ l'accelerazione è positiva, ed ha verso concorde con quello dell'asse x, come risulta dal grafico di a_x. Sul protone agisce allora un aforza $F = ma_x$ repulsiva e non può avvicinarsi ulteriormente al punto O, anzi il suo moto ora si inverte acquistando una velocità verso l'alto che aumenta gradualmente tendendo asintoticamente ad un valore costante.

Prob. complementare N. 3

Agli estremi di una molla condutrice di massa trascurabile, avente lunghezza ℓ_0 e costante elastica k, vengono fissate due sferette di massa m e raggio $r << \ell_0$; la capacità elettrica della molla sia trascurabile rispetto a quella delle sferette. Appena una carica Q viene trasferita al sistema – posto orizzontalmente su di un piano senza attrito – le due sferette cominciano ad oscillare.

Determinare la lunghezza massima ℓ raggiunta dalla molla.



Poiché la capacità elettrica della molla è trascurabile, la carica trasmessa al sistema si distribuisce solamente tra le due sferette, ciascuna delle quali avrà una carica q pari alla metà di quella trasmessa, in quanto i raggi sono uguali. Essendo poi $r << \ell_0$ si può assumere che la distribuzione di carica su ciascuna sferetta sia uniforme.

In assenza di attrito, il sistema è conservativo, dunque si conserva l'energia totale meccanica del sistema.

$$E_i = E_f$$
$$(E_k + E_p)^i = (E_k + E_p)^f$$

tenendo condo che l'energia potenziale è la somma dell'energia potenziale elastica ed elettrica si ha

$$(E_k + E_{p,elastica} + E_{p,elettrica})^i = (E_k + E_{p,elastica} + E_{p,elettrica})^f$$

Il problema chiede l'elongazione massima della molla, dunque possiamo considerare come istanti iniziale e finale l'istante in cui viene comunicata la carica Q al sistema (istante nel quale la molla ha la lunghezza di riposo) e l'istante di elongazione massima nel quale evidentemente la velocità è nulla, dunque il bilancio energetico assume la seguente forma

$$(E_{p,elettrica})^{i} = (E_{p,elastica} + E_{p,elettrica})^{f} \qquad (1)$$

$$k\frac{q^2}{\ell_0} = k\frac{q^2}{\ell} + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

che risulta essere una banale equazione di secondo grado in ℓ, semplifichiamo la scrittura con al seguente posizione $A = q^2/(2\pi\varepsilon_0 k\ell_0) = Q^2/(8\pi\varepsilon_0 k\ell_0)$ e moltiplicando per 2/k

$$A = (\ell_0 / \ell)\, A + (\ell \quad \ell_0)^2 \text{ ossia}$$

$$(\ell \quad \ell_0)\, A = (\ell \quad \ell_0)^2\, \ell \qquad (2)$$

Ora bisogna considerare il fatto che la (1) descrive sia l'stante finale di elongazione massima che minima (massima compressione della molla) in quanto in questi due istanti la velocità delle sferette è nulla, ma noi siamo interessati all'istante della massima elongazione dove $\ell > \ell_0$ dunque è lecito dividere la (2) per $(\ell \quad \ell_0)$ avendosi

$$A = (\ell \quad \ell_0)\, \ell$$

$$\ell^2 \quad \ell_0\, \ell \quad A = 0$$

$$\ell = \frac{1}{2}(\ell_0 + \sqrt{\ell_0^2 + 4A}$$

dove abbiamo preso solo il segno positivo sempre perché stiamo cercando una soluzione per $\ell > \ell_0$ andando ad esplicitare l'espressione della costante A si ha il valore cercato

$$\ell = \frac{1}{2}(\ell_0 + \sqrt{\ell_0^2 + \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0 k\ell_0}}$$

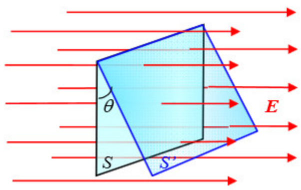
2. Il teorema di Gauss, capacità e condensatori

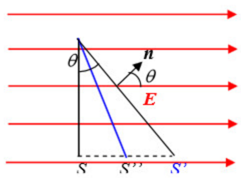
Prob. 2.1

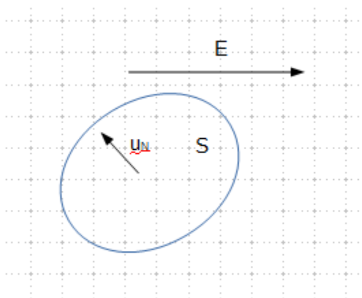
Dato un campo elettrico uniforme di intensità E parallelo all'asse x**, si calcoli il flusso attraverso:**

a) **una superficie piana di area** A **e inclinata di un angolo** α **rispetto all'asse** x**;**
b) **una sfera di raggio** R **e centro nell'origine degli assi coordinati;**
c) **una semisfera di raggio** R **e con l'asse parallelo all'asse** x**.**

Si vede dalla figura che segue che la relazione fra S e S' è $S = S' \cos\theta$
L'angolo θ che separa le due superfici è anche l'angolo fra la normale a S' ed il campo eletrico E.

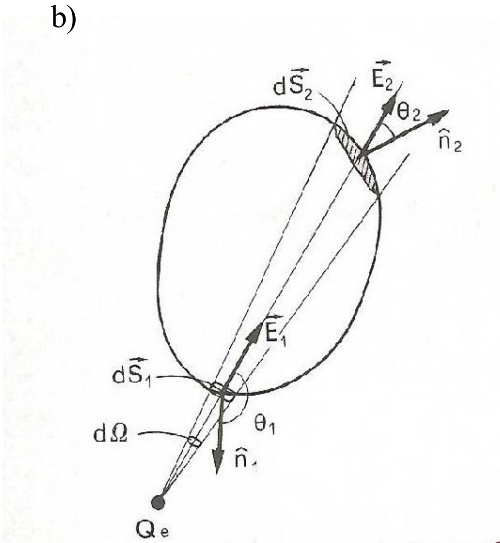






Per definizione il flusso di E è $\Phi_E = \int \mathbf{E}\, d\mathbf{S}$
Nel nostro caso di ha
$\Phi_E = \int \mathbf{E}\, \mathbf{u}_N\, dS = \int E \cos\theta\, dS = E \int \cos\alpha\, dS = E\, S \sin\theta$

b)



Consideriamo una carica Q che si trovi all'estermo di una superficie chiusa S. Ogni cono di angolo solido $d\Omega$ con vertice in Q, o non intercetta la superficie S (e non si ha flusso) o la intercetta in due elementi di superficie $d\mathbf{S}_1$ e $d\mathbf{S}_2$.
I flussi elementari $d\Phi_1$e $d\Phi_2$ attraverso questi due elementi di superficie hanno lo stesso valore assoluto in quanto

$$\frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2} = d\Omega$$

valendo d'altronde la relazione
$d\Phi_E = k\, Q\, d\Omega$.
Tuttavia mentre $d\Phi_1$è negativo ($\theta_1 < 90°$) $d\Phi_2$ è positivo ($\theta_2 < 90°$) per cui abbiamo che la loro somma è nulla.
$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 = 0$
Siccome il discorso fatto vale per ogni angolo solido elementare $d\Omega$ il flusso totale attraverso la superficie chiusa è nullo: $\Phi_E = 0$

c) Il numero di linee di campo che attraversa la semisfera è lo stesso numero che attraversa il cerchio che sta alla sua base di area πR^2, pertanto

$$\Phi_E = E\ \pi R^2$$

Oppure

si può consideare che dalla definizione del flusso elementare è possibile scriverla in due modi

$$\Delta\Phi = \mathbf{E}\quad \mathbf{n}\ dS = E_\perp \Delta S = E \Delta S_\perp$$

Scegliendo nel nostrao caso la seconda forma si ha

$$\Delta\Phi_E = E \Delta S_\perp = E\ \pi R^2$$

Prob. 2.2

Tre cariche puntiformi $Q_1 = 10^{-9}$ C**,** $Q_2 = \quad Q_1$ **e** $Q_3 = 2Q_1$ **sono poste nei punti** $P_1 \equiv (0, 0, 0)$**,** $P_2 \equiv (0{,}3\ m, 0, 0)$ **e** $P_3 \equiv (0, 0{,}4\ m, 0)$, **rispettivamente. Si calcoli:**

a) **il potenziale elettrostatico** V **nel punto** $P \equiv (0{,}3\ m, 0{,}4\ m, 0)$**;**

b) **il flusso** $\Phi_S(E)$ **attraverso una sfera con centro in** P_1 **e raggio** $r = 0{,}35$m**.**

a) Il potenziale in P è $V(P) = k\ Q_1\ (1/r_1 - 1/r_2 + 2/r_3)$

$r_1 = (0.3^2+0.4^2)^{1/2} = 0.5$ m

$r_2 = 0.4$ m

$r_3 = 0.3$ m

$$V(P) = 9\ 10^9\quad 10^{-9}\ (1/0.5\quad 1/0.4 + 2/0.3) = 9\quad 6.1 = 55.5\ V$$

b) Il flusso di E è dato dalla somma algebrica delle cariche presenti all'interno della sfera di raggio 0.35 m, che sono le cariche Q_1 e Q_2 che essendo opposte danno un flusso nullo.

$$\Phi_E = (Q_1 + Q_2)/\ \varepsilon_0 = (Q_1\quad Q_1)/\ \varepsilon_0 = 0$$

Se consideriamo il valor medio della potenza vale la legge di Galileo-Ferraris (che risponde al quesito posto)

$$W_{ave} = I_{eff}\, V_{eff} \cos \varphi$$

Numericamente si ha

$$W = 0.632 \quad 200 \cos 0.322_{rad} = 120 \text{ W}$$

Prob. 12.3

Un condensatore di capacità $C=10\ \mu F$**, costruito in modo da non sopportare tensioni efficaci superiori a** $V_{max}=500$ V**, è posto in serie con una resistenza** $R=20\ \Omega$ **e un'induttanza** L**; il circuito è alimentato da una tensione alternata di pulsazione** $\omega=500$ rad/s **e valore efficace** $\varepsilon_{eff} =$ 200 V**. Quali sono i valori permessi per** L **se non si vuole danneggiare il condensatore?**

Per evitare ambiguità scriviamo la tensione del generatore come ε.
La tensione efficace ai capi del condensatore la ricaviamo dalla (5) e dalla (8)

$$V_{C,eff} = Z_C I_{eff} = \frac{1}{\omega C}\frac{\varepsilon_{eff}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

La condizione $V_{C,eff} < V_{max}$ implica

$$\frac{1}{\omega C}\frac{\varepsilon_{eff}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} < V_{max}$$

con banali passaggi algebrici si arriva alla seguente condizione su L

$$\left(L - \frac{1}{\omega^2 C}\right)^2 > \left(\frac{\varepsilon_{eff}}{\omega^2 C V_{max}}\right)^2 - \frac{R^2}{\omega^2}$$

scrivendo i termini noti come

$$a = \frac{1}{\omega^2 C} = 0.4 \quad \text{e} \quad b = \left(\frac{\varepsilon_{eff}}{\omega^2 C V_{max}}\right)^2 - \frac{R^2}{\omega^2} = 0.024$$

si ha la seguente disequazione di secondo grado

$(L \quad a)^2 > b$ con soluzioni

$L > a + \sqrt{b} = 0.555$ H

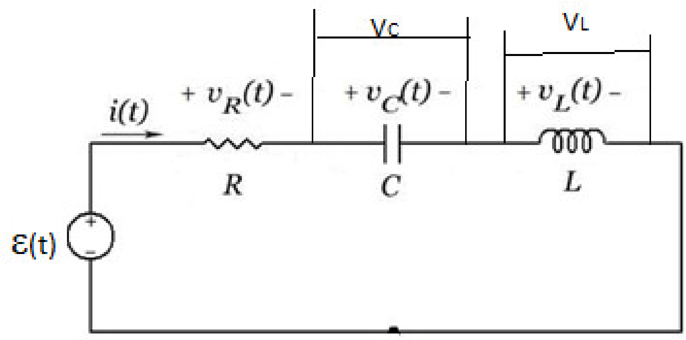
$L < a \quad \sqrt{b} = 0.245$ H

Prob. 12.4

Un generatore di fem alternata con ampiezza costante ma frequenza regolabile è chiuso sopra una resistenza R, un condensatore C e un'induttanza L disposti in serie.

a) Per quale valore della frequenza la caduta di tensione nel condensatore risulta massima? Tale frequenza è maggiore o minore di quella di risonanza del circuito?

b) Per quale valore della frequenza la caduta di tensione nell'induttanza risulta massima?



a)

Dalla (5) del Prob. 12.2 sappiamo che la ddp ai capi del condensatore vale

$V_C(t) = -\frac{i}{\omega C} I(t)$ o, passando ai valori efficaci

$V_{c,eff} = (1/\ \omega C)\ I_{eff}$ ma dalla (8) sappiamo che la $\varepsilon_{eff} = I_{eff}\, Z$ dunque

$V_{c,eff} = (1/\ \omega C)\ \varepsilon_{eff} / Z$

$$V_{C,eff} = \frac{1}{\omega C} \frac{\varepsilon_{eff}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

portando la pulsazione dentro la radice si ha

$$V_{C,eff} = \frac{1}{C} \frac{\varepsilon_{eff}}{\sqrt{\omega^2 R^2 + (\omega^2 L - \frac{1}{C})^2}} \qquad (1)$$

$V_{C,eff}$ avrà valore massimo quando il suo denominatore avrà valore minimo, andiamo quindi a ricercare i punti di minimo della funzione sotto radice:

$$\frac{d}{d\omega}\left[\omega^2 R^2 + (\omega^2 L - \frac{1}{C})^2\right] = 0 = 2\omega\left(-\frac{2L}{C} + 2\omega^2 L^2 + R^2\right)$$

questa uguaglianza sarà soddisfatta quando la parentesi si annullerà

$$\left(-\frac{2L}{C} + 2\omega^2 L^2 + R^2\right) = 0$$

$$2\omega^2 L^2 = \frac{2L}{C} - R^2 \quad \omega\ = \omega^* = \sqrt{\frac{1}{L\,C} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

(dove X_C denota la reattanza del condensatore, $X_{1,2}$ quelle delle due induttanze e X_M quella della mutua induttanza)

Sostituendo i valori di V_1 e V_2 dati dalle (1) si ha

$$\varepsilon = \ j X_C (I_1 \quad I_2) + j X_1 I_1 + j X_M I_2$$
$$0 = R_2 I_2 + j X_2 I_2 + j X_M I_1 \quad j X_C (I_1 \quad I_2)$$

dai dati del problema si ha $\omega = (L_2C)^{1/2}$ quindi

$$X_2 = \omega L_2 = 1/\omega C = \quad X_C$$

avendosi

$$\varepsilon = \ j (X_C + X_1) I_1 + j(X_M \quad X_C) I_2$$
$$0 = R_2 I_2 + j (X_M \quad X_C) I_1$$

La sesonda di queste equazioni ci da direttamente la relazione fra le correnti

$$I_2 = -j \frac{X_M - X_C}{R_2} I_1$$

che sostituita nella prima porta alla seguente espressione

$$\varepsilon = j(X_C + X_1)I_1 + j(X_M - X_C)(-j \frac{X_M - X_C}{R_2} I_1)$$

$$\varepsilon = \left[\frac{(X_M - X_C)^2}{R_2} + j(X_C + X_1) \right] I_1 = Z_0 I_1$$

Ricordandoci che l'impedenza totale vale $Z = Z_0 + R_1$

$$\varepsilon = (Z_0 + R_1)I_1 = \left[(R_1 + \frac{(X_M - X_C)^2}{R_2}) + j(X_C + X_1) \right] I_1$$

passando ai valori efficaci si ha

$$\varepsilon_{eff} = |Z| I_{1,eff}$$

il modulo di Z vale

$$|Z| = |Z_0 + R_1| = \sqrt{\left(R_1 + \frac{(X_M - X_C)^2}{R_2} \right)^2 + (X_C + X_1)^2}$$

sostituendo infine i valori delle reattanze perveniamo alla soluzione

$$I_{1,eff} = \frac{\varepsilon_{eff}}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{1}{R_2}(M\omega + \frac{1}{\omega C})^2 \right)^2 + (\omega L_1 - \frac{1}{\omega C})^2}} = 1.20 \text{ A}$$

$$I_{2,eff} = \frac{\varepsilon_{eff}}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{1}{R_2}(M\omega + \frac{1}{\omega C})^2 \right)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}} = 1.37 \text{ A}$$

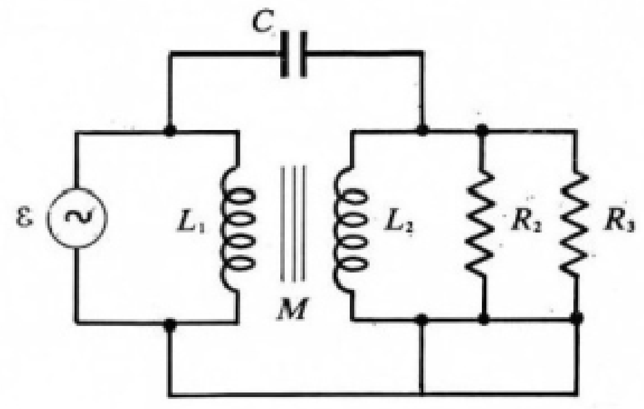
Lo sfasamento della corrente sarà

$$\varphi_1 = \arctan \frac{(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C})}{\left(R_1 + \frac{1}{R_2}(M\omega + \frac{1}{\omega C})^2 \right)} = 0.80 \text{ rad}$$

$$\varphi_2 = \arctan \frac{(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{\left(R_1 + \frac{1}{R_2}(M\omega + \frac{1}{\omega C})^2 \right)} = 0.96 \text{ rad}$$

Prob. 12.20

Nel circuito di figura è ε_{eff} = 220 V**,** ν = 50 Hz, R_2 = 2 kΩ, R_3 = 40 kΩ, C = 1 μF, L_1 = 1 mH **ed il coefficiente di accoppiamento tra primario e secondario del trasformatore vale** k = 1**. Si calcoli la tensione efficace ai capi della resistenza** R_3**.**



Considerando che viene "imposta" una tensione ε ai morsetti primari del trasformatore ideale è

$V_1 \equiv \varepsilon$

ricordando che

$a = V_1/V_2$

cioè

$V_2 = V_1 / a = \varepsilon / a$

e che il rapporto di trasformazione vale (vedi nota 1)

$a = L_1 / M$

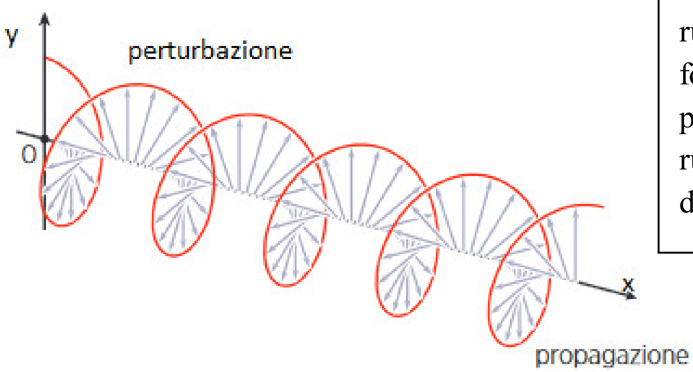
$$V_2 = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\varepsilon$$

Considerando che L_2, R_2 ed R_3 sono in parallelo essi sono sottoposti alla medesima tensione che è quella di uscita ai morsetti del secondario V_2 avremo che la tensione su R_3 è V_2.

Prob. 13.5

Si dimostri che nel caso di un'onda elettromagnetica polarizzata circolarmente il vettore di Poynting è indipendente dal tempo.

Un'onda elettromagnetica polarizzata circolarmente la si può scrivere nel seguente modo, facendo riferimento alla figura seguente



Un'onda elettromagnetica è polarizzata circolarmente quando il vettore campo elettrico ruota intorno alla direzione di propagazione, formando così un'elica intorno all'asse di propagazione ed il vettore campo magnetico ruota lungo l'asse perpendicolare ad **E** (non disegnato nella figura).

Un'onda elettromagnetica polarizzata circolarmente la si può scrivere nel seguente modo,

supponendo che la direzione di propagazione sia l'asse x:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\,[\sin(kx \quad \omega t)\,(\pm\mathbf{j}) + \cos(kx \quad \omega t)\,\mathbf{j}\,]$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0\,[\sin(kx \quad \omega t)\,(\quad \mathbf{j}) + \cos(kx \quad \omega t)\,(\pm)\mathbf{k}\,]$$

i vettori **E** e **B** ruotano, costantemente rimanendo perpendicolari fra loro, con velocità angolare $\pm\omega$ intorno alla direzione di propagazione.

Scriviamo dunque il vettore di Poynting per tale onda

$$\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{ExB}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\left[E_0(\sin(kx-\omega t)(\pm\boldsymbol{j}) + cos(kx-\omega t)\boldsymbol{k})\ \right] x \left[(E_0/c)(\sin(kx-\omega t)(-\boldsymbol{j}) + cos(kx-\omega t)(\pm\boldsymbol{k}))\right]$$

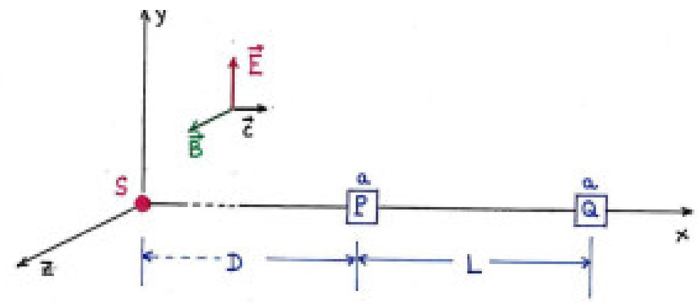
eseguendo i prodotti vettorariali si arriva alla seguente espressione

$$\boldsymbol{S} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\boldsymbol{i} = \varepsilon_0 c E_0^2 \boldsymbol{i}$$

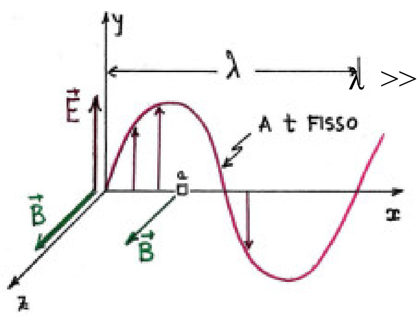
quindi S risulta effettivamente indipendente dal tempo.

Prob. complementare N. 15

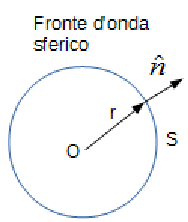
Una sorgente puntiforme lontana S **irraggia, in modo isotropo nello spazio vuoto, un'onda elettromagnetica sinusoidale li lunghezza d'onda** λ **che, a grande distanza, può essere considerata piana, L'onda è polarizzata linearmente con il campo elettrico parallelo all'asse** y **e si propaga nella direzione positiva dell'asse** x**, come mostrato in figura. Per effetto dell'onda, su una spira quadrata di lato** $a \ll \lambda$ **con centro in P e giacente sul piano** xy**, viene indotta una fem sinusoidale di ampiezza** $\mathcal{E}_1$**. Su una seconda spira uguale alla prima, posta nel piano** (xy) **con centro in** Q **sull'asse** x **a distanza** L **da** P**, l'ampiezza della fem** $\mathcal{E}_2$ **si riduce del 15%. Ricavare l'espressione della distanza** D **fra la sorgente** S **ed il punto** P**.**



Siccome la lunghezza d'onda è molto maggiore del lato della spira, ad ogni istante, **B** può essere considerato uniforme sulla spira stessa. Questa circostanza permette di calcolare il flusso del campo magnetico come prodotto dell'area della spira per la componente normale di **B** nel suo centro.



>> a implica **B** uniforme sulla spira



La potenza emessa dalla sorgente la ritroviamo "spalmata" sulla superficie della sfera di raggio generico r

Detta I l'intensità della sorgente posta in O ossia l'energia emessa per ogni secondo su una superficie unitaria (W/m^2) possiamo scrivere

----
Dal teorema della circuitazione abbiamo che H (2 π R) = I, cioè

$$H = \frac{I}{2\pi R}$$

il vettore di Poynting ha modulo

$$S = EH = \frac{\rho I}{\pi^2 R^2}\frac{I}{2\pi R} = \frac{\rho I^2}{2\pi^2 R^3}$$

ed è diretto radialmente all'interno del filo.
Il flusso di S entrante atraverso la superficie di un tratto di filo di lunghezza L è

$$W = S\ 2\ \pi\ R\ L = \rho\ L\ I^2/\ (\pi R^2) = R\ I^2$$

dove R è quì la resistenza del tratto di filo considerato, e quindi vediamo che esso coincide con la potenza dissipata per effetto Joule.

Prob. 13.10

Una sorgente gassosa emette luce visibile di lunghezza d'onda λ=5 10^{-7} m **e la potenza media è** w=2 W **. Si consideri ciascuna molecola come un oscillatore di carica** e **con ampiezza di oscillazione** A=10^{-10} m**: qual è il numero** N **di molecole che emettono la radiazione in questione?**

Quando una carica e compie delle oscillazioniu armoniche con ampiezza A, come è stato discusso nel Pro. 10.9 la potenza media irradiata da essa è

$$W_{media} = \frac{e^2\omega^4 A^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

con idati del problema si ha

$$W_m = 5.75\ 10^{-12}\ W,$$

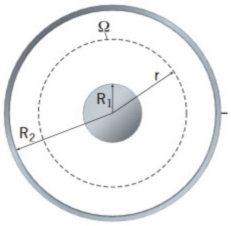
quindi il numero di molecole che irradiano è

$$N = w/W_m = 2\ /5.75\ 10^{-12} = 3.48\ 10^{11}\ \text{molecole}$$

Prob. 13.16

Un condensatore cilindrico di lunghezza L **si va scaricando a causa di un isolante imperfetto contenuto tra le sue armature, di permittività relativa** ε_r **e conduttività elettrica** γ**; all'istante** $t = 0$ **la carica del condensatore è** Q_0**. Si determini, in funzione del tempo e della posizione:**

a) la densità di corrente di conduzione;
b) la densità di corrente di spostamento;
c) il campo magnetico tra le armature del condensatore.



a)

Applicando Gauss alla superficie Ω (essendo L la lunchezza del cilindro)

$\Phi(E) = E\,S = Q / \varepsilon$

la superficie laterale del cilindro di raggio r e lunghezza L è

$S = 2\,\pi\,r\,\ell\,E$

Il campo elettrico è

$E(r,t) = Q(t) / 2\,\pi\,\varepsilon\,r\,\ell$ (1)

La densità della corrente di conduzione è data dalla relazione

$j_C = \sigma\,E$ (2)

dove σ è la conduttività elettrica del mezzo.

L'intensità di corrente è per definizione I = dQ/dt, ma essendo nel nostro caso una perdita di corrente si ha

$I_C = \quad dQ / dt = j\,S$

dove S è la superficie attraverso cui fluisce la corrente che ovviamente coincide con la superficie laterale del cilindro sopra considerata

sostituendo il valore di S data dalla (1) S = Q/E e il valore di j data dalla (2) si ha

$I_C = \sigma\,E\,Q / \varepsilon\,E = \sigma\,Q / \varepsilon$

dunque

$dQ / dt = \quad (\sigma/\varepsilon)\,Q$

banale equazione differenziale di cui conosciamo la soluzione

$Q(t) = Q_0 \exp(\quad t/ \tau)$

con $\tau = \varepsilon / \sigma$

quindi la densità di corrente di conduzione è

$$j_C = \sigma E = \sigma \frac{Q(t)}{2\pi\varepsilon r\ell} = \frac{\sigma Q_0}{2\pi\varepsilon r\ell} e^{-t/\tau}$$