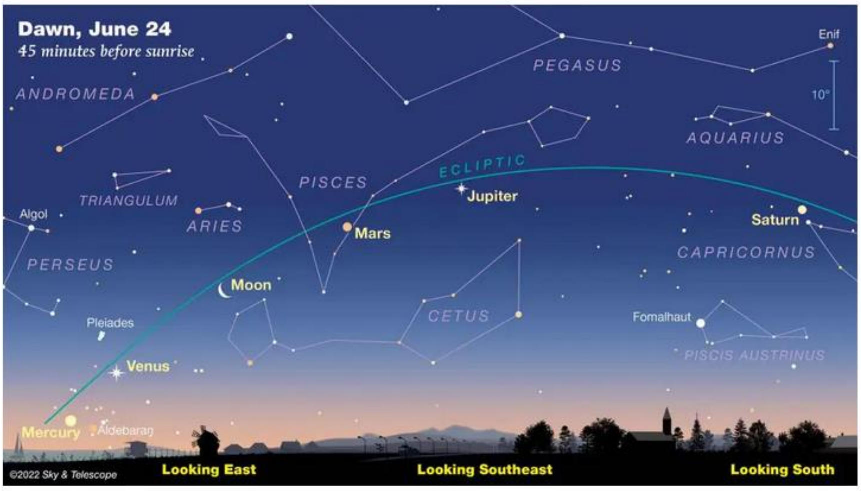
Appunti sulla legge gravitazionale

(a cura di Giancarlo Buccella - 2023)

Il moto dei corpi celesti ha affascinato l'umanità sin dagli albori della civiltà. Uno dei processi più interessanti nella storia della scienza è stato l'evoluzione della nostra comprensione del moto dei pianeti.

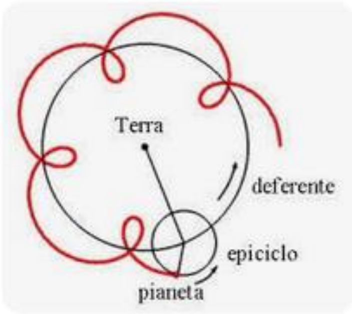
I Greci amavano considerare la Terra come il centro dell'Universo. Essi supponevano che la Terra fosse il centro geometrico e che tutti i "corpi celesti" si muovessero attorno ad essa. I corpi celesti conosciuti a quel tempo erano quelli visibili ad occhio nudo: Luna, Sole, Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno, con le stelle fisse disposte su di una sfera più esterna.

Nella illustrazione seguente vediamo una congiunzione non usuale (avvenuta a giugno 2022) di tutti e cinque i pianeti disposti in ordine crescente di distanza dal Sole



La prima ipotesi sul moto planetario fu quella secondo la quale i pianteti (dal greco "planetes" che significa vagabondo, errante) descrivono orbite circolari concentriche aventi la Terra come centro. Tuttavia dalle prime osservazioni ci si accorse che tale modello non si accordava con il moto osservato.

La geometria del moto planetario divenne sempre più complesso, per tener conto delle osservazioni. Nel II secolo d.C., l'astronomo Tolomeo di Alessandria sviluppò la teoria degli epicicli. Nel caso più semplice si supponeva che il pianeta descrivesse con moto uniforme una circonferenza chiamata *epiciclo*. Il centro dell'epiciclo, a sua volta, si muoveva su una circonferenza più grande, concentrica con la Terra, chiamata *deferente*. La traiettoria risultante del pianeta è quindi un'epicicloide (vedi figura seguente).



Questa descrizione sopravvisse fino al XVI secolo, quando Niccolò Copernico (1473 – 1543) sviluppò un metodo differente. Egli andava cercando una soluzione più semplice, e propose quindi di descrivere il moto non centrato sulla Terra ma sul Sole, tale modello, detto *eliocentrico*, non era nuovo, fu infatti proposto da Aristarco di Samo attorno al III secolo a.C. Inoltre Aristarco concordava con Eraclide Pontico nell'attribuire alla Terra anche un moto di rotazione diurna attorno ad un asse inclinato rispetto al piano dell'orbita intorno al Sole, giustificando così l'esistenza delle stagioni. La teoria eliocentrica fu rifiutata con forza da Platone (428 - 348 a.C.) e dal suo allievo Aristotele (384 - 322 a.C.), e fu respinta quattro secoli dopo Aristarco, anche da Claudio Tolomeo, le cui concezioni dominarono incontrastate la tarda antichità e il medioevo.

Il sistema copernicano può sintetizzarsi in sette assunti, così come dal medesimo autore enunciati nel compendio *De revolutionibus orbium coelestium* (Sulle rivoluzioni delle sfere celesti) ritrovato e pubblicato nel 1878. Steso tra il 1507 e il 1512, nel "*Nicolai Copernici de hypothesibus motuum coelestium a se constitutis commentariolus*", Copernico presentò le sette *petitiones* (cioè i sette postulati della teoria) che dovevano dare vita a una nuova astronomia:

1. Non vi è un unico punto centro delle orbite celesti e delle sfere celesti.
2. Il centro della Terra non è il centro dell'Universo, ma solo il centro della massa terrestre e della sfera lunare.
3. Tutte le sfere ruotano attorno al Sole, che quindi è in mezzo a tutte, e il centro dell'Universo si trova vicino a esso.
4. Il rapporto della distanza tra il Sole e la Terra con l'altezza del firmamento, è tanto più piccolo di quello tra il raggio della Terra e la distanza di questa dal Sole, che, nei confronti dell'altezza del firmamento, tale distanza è impercettibile (non viene quindi percepito alcun movimento apparente nelle stelle fisse).
5. Qualsiasi movimento appaia nel firmamento non appartiene a esso, ma alla Terra; pertanto la Terra, con gli elementi contigui, compie in un giorno un intero giro attorno ai suoi poli fissi, mentre il firmamento resta immobile, inalterato con l'ultimo cielo.
6. Qualunque movimento ci appaia del Sole, non appartiene a esso, ma dipende dalla Terra e dalla nostra sfera, insieme alla quale noi ruotiamo intorno al Sole come qualsiasi altro pianeta, e così la Terra compie più movimenti.
7. Per i pianeti appare un moto retrogrado e un moto diretto; ciò in realtà non dipende da loro, ma dalla Terra; pertanto, il moto di questa sola basta a spiegare tante irregolarità celesti.

Queste asserzioni rappresentavano l'esatto opposto di quanto affermava la teoria geocentrica, allora comunemente accettata. Copernico fu molto attento a non assumere atteggiamenti rivoluzionari, né con la sua condotta di vita, né nelle sue opere. Egli costruì una nuova cosmologia partendo dagli stessi dati dell'astronomia tolemaica e rimanendo ancorato ad alcune tesi fondamentali dell'aristotelismo: 1) perfetta sfericità e perfetta finitezza dell'Universo; 2) immobilità del Sole data dalla sua natura divina; 3) centralità del Sole dovuta a migliore posizione da cui "può illuminare ogni cosa simultaneamente" (Copernico).

La presunta maggiore semplicità e armonia del sistema (argomenti con cui Copernico e il discepolo Giorgio Gioacchino Retico difendevano la visione copernicana) era però più apparente che reale. Per non contraddire le osservazioni Copernico fu costretto a non fare coincidere il centro dell'Universo con il Sole, ma con il centro dell'orbita terrestre; dovette reintrodurre epicicli ed eccentrici, come Tolomeo; dovette attribuire alla Terra, oltre al moto di rivoluzione attorno al Sole e a quello di rotazione attorno al proprio asse, un terzo moto (declinationis motus), per rendere conto dell'invariabilità dell'asse terrestre rispetto alla sfera delle stelle fisse.

Benché all'epoca di Copernico il sistema eliocentrico e quello geocentrico fossero sostanzialmente equivalenti in termini di complessità e di capacità predittiva, il grande vantaggio del sistema copernicano fu l'eliminazione di un epiciclo dalle orbite di tutti i pianeti. Nel sistema copernicano questo epiciclo è dovuto al fatto che le orbite sono osservate dalla Terra, la quale a sua volta gira attorno al Sole. L'osservazione che i pianeti hanno un epiciclo in comune, dovuto all'orbita della Terra, apriva tra l'altro la possibilità di misurare le distanze dei pianeti dal Sole (o, meglio, il loro rapporto con il raggio dell'orbita terrestre) con il metodo della parallasse. Copernico volle anche eliminare l'equante di Tolomeo; poiché le orbite sono ellittiche, tuttavia, dovette comunque introdurre degli epicicli. Solo con Keplero questi ultimi non saranno più necessari.

Ribadiamo che Copernico propose la sua teoria basandosi non su dati osservativi ma solo sull'assunto che il moto doveva essere più semplice di quello geocentrico.

Principale sostenitore del modello eliocentrico fu Johannes Kepler (1571 – 1630) il quale nel 1596 pubblicò l'opera *Mysterium Cosmographicum*, nella quale tentò una prima descrizione del moto planetario, il cui scopo non era quello di difendere il sistema copernicano, ma piuttosto quello di dimostrare che per la creazione del mondo e la disposizione dei cieli, Dio si è ispirato ai cinque solidi regolari che hanno goduto di così grande fama da Pitagora e Platone in poi: il cubo, il tetraedro, il dodecaedro, l'icosaedro, l'ottaedro. Keplero si interroga circa le cause del numero, delle dimensioni e dei moti delle orbite, e sostiene che questa ricerca sia fondata sulla corrispondenza tra i tre "corpi" immobili dell'Universo (Sole, stelle fisse, spazio intermedio) e Padre, Figlio e Spirito Santo (la Trinità). Le leggi della struttura del cosmo vengono ricavate circoscrivendo e inscrivendo le orbite dei pianeti nelle varie figure solide, a partire dalla Terra, che è l'unità di misura di tutte le orbite.

Le basi per le sue scoperte astronomiche furono gettate nel 1609, quando pubblicò il suo capolavoro *Astronomia nova*, in cui formulò le sue prime due leggi. Nel 1618 Keplero scoprì la terza legge, che rese nota l'anno dopo nell'opera *Harmonices Mundi*. Keplero a differenza di Copernico basò le sue "leggi" su dati osservativi e non su speculazioni teoriche. Ciò fu possibile grazie alle numerose e precise osservazioni di Tycho Brahe (1546 – 1601). Il più grande merito di Brahe rimane quello di aver impostato una precisa metodologia scientifica riguardo all'astronomia, servendosi di osservazioni rigorose e sistematiche, tramite l'impiego di idonea strumentazione. Brahe fu uno straordinario osservatore dell'era pre-telescopio: le sue osservazioni delle posizioni stellari e planetarie raggiunsero un'accuratezza impareggiabile per i suoi tempi (la nascita del telescopio risale a Galileo (1607)).

Le tre leggi di Keplero (leggi empiriche) sono:

I) I pianeti descrivono orbite piane ed ellittiche, di cui il Sole occupa uno dei fuochi.

II) Il vettore posizione di ogni pianeta rispetto al Sole descrive aree uguali della sua orbita ellittica in tempi uguali. Legge delle aree.

III) I cubi delle distanze medie dei pianeti dal Sole sono proporzionali ai quadrati dei periodi di rivoluzioni. $R^3 = C\, P^2$, dove C è una opportuna costante di proporzionalità.

Nella seguente tabella vengono riportati i dati più significativi nel sistema solare.

Body	Equatorial radius (m)	Mass (kg)	Period of rotation (s)	Semi-major axis of orbit (m)	Period of orbital motion (s)	Eccentricity of orbit
Sun	6.69×10^8	1.99×10^{30}	2.4×10^6	—	—	—
Mercury	2.44×10^6	3.30×10^{23}	5.07×10^6	5.79×10^{10}	7.60×10^6	0.2056
Vénus	6.05×10^6	4.87×10^{24}	2.10×10^7†	1.08×10^{11}	1.94×10^7	0.0068
Earth	6.38×10^6	5.97×10^{24}	8.62×10^4	1.50×10^{11}	3.16×10^7	0.0167
Mars	3.39×10^6	6.42×10^{23}	8.86×10^4	2.28×10^{11}	5.94×10^7	0.0934
Jupiter	7.14×10^7	1.90×10^{27}	3.54×10^4	7.78×10^{11}	3.75×10^8	0.0483
Saturn	6.00×10^7	5.69×10^{26}	3.84×10^4	1.43×10^{12}	9.30×10^8	0.0560
Uranus	2.61×10^7	8.70×10^{25}	6.20×10^4	2.87×10^{12}	2.65×10^9	0.0461
Neptune	2.43×10^7	1.03×10^{26}	6.48×10^4	4.59×10^{12}	5.20×10^9	0.0100
Pluto	1.14×10^6	1.20×10^{22}	5.52×10^5	5.91×10^{12}	7.84×10^9	0.2484
Moon*	1.74×10^6	7.35×10^{22}	2.36×10^6	3.84×10^8	2.36×10^6	0.0550

* Orbital data of the Moon are relative to the Earth
† Venus exhibits retrograde motion

Le leggi di Keplero forniscono una descrizione del moto planetario ma non sono in grado di spiegare in base a quale legge matematica essi si muovono proprio in quel modo. Tale spiegazione fu data da Isaac Newton (1642 - 1727) con la sua teoria della gravitazione nel 1666, ma pubblicata solo 21 anni dopo, nella sua opera più importante *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, (detta usualmente: "i Principia").

Il fatto che i pianeti descrivano un'orbita chiusa e non si allontanino indefinitamente dal Sole indica che deve agire una forza (il concetto di forza come causa del moto fu Newton stesso ad introdurlo, con le sue fondamentali tre leggi del moto che costituiscono le basi di tutta la Meccanica) di tipo attrattivo. Una forza attrattiva può dar luogo anche ad un'orbita aperta, ma una forza repulsiva non può dar luogo ad un'orbita chiusa.
Con Keplero si è giunti a formulare leggi empiriche che descrivono il moto, con Newton conosciamo le leggi che la Natura impiega per far svolgere tali moti, ad esempio la conoscenza della forza fra il Sole e i suoi pianeti ci permette di ricavare la legge del moto **r** = **r**(t) e la sua traiettoria.

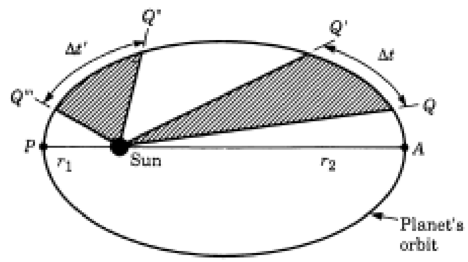
Vediamo come le leggi di Keplero possono essere dedotte dalla teoria e più specificamente dalla meccanica classica e dalla scoperta della legge della gravitazione universale; entrambe vedono Newton protagonista.

a) *Orbita piana e velocità areolare costante*

Le orbite ellittiche sono caratterizzate da una grandezza detta eccentricità. Indicando con r_1 e r_2 la distanza minima e massima del pianeta dal Sole, l'eccentricità è definita dalla seguente formula

$e = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = \frac{r_2 - r_1}{2a}$ dove 2a è la lunghezza dell'asse maggiore dell'ellisse.

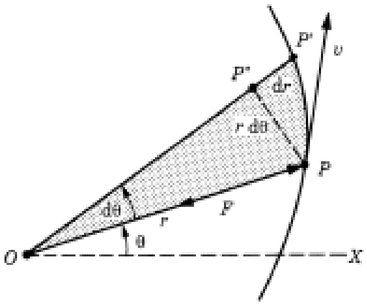
Dalla formula si evince che se $r_1 = r_2$ si ha e = 0, ossia per la circonferenza l'eccentricità vale zero. Dalla tabella precedente si vede che fatta eccezione per Mercurio e Plutone (classificato dal 2006 come pianeta nano) le orbite sono praticamente circolari.
La legge aree afferma che l'area "spazzata" per unità di tempo dal raggio vettore del pianeta, relativo al Sole, per andare da Q a Q' deve risultare uguale a quella spazzata per unità di tempo per andare da Q'' a Q''', come illustrato nella seguente figura.



Cioè deve risultare

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\Delta A'}{\Delta t'}$$

Vediamo ora come da questa affermazione ne discende la costanza del momento angolare e di conseguenza il fatto che la forza associata all'interazione gravitazionale deve essere una forza di tipo centrale. Consideriamo a tal proposito una particella che descriva una traiettoria curvilinea, come quella della figura seguente.



In un piccolo intervallo di tempo dt la particella si sposta da P in P' ed il raggio vettore r descrive ("spazza") l'area tratteggiata, il cui valore è dato approssimativamente da dA = ½ base x altezza = ½ [r(r dθ)] = ½ r^2 dθ

L'area spazzata per unità di tempo è

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

La legge delle aree richiede che tale valore sia costante $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \cos t$

Come noto dalla meccanica il momento angolare di una particella che descrive una traiettoria curvilinea può essere espressa come $L = mr^2\omega = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$ e confrontando queste due espressioni si ha

$$L = 2m\frac{dA}{dt} = \cos t$$

Abbiamo così dimostrato che la seconda legge di Keplero implica la costanza del modulo del momento angolare. Vale evidentemente anche il viceversa. Quindi da una proprietà della teoria – la costanza del modulo di **L** – si deduce la legge delle aree.

La costanza del vettore momento angolare inoltre, implica che il moto sia piano.

Infatti dalla definizione del momento angolare si ha

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{M} = \mathbf{r} \; x \; \boldsymbol{F}$$

e se **L** = cost ciò significa che il momento della forza (rispetto al centro della forza, ossia del Sole nel nostro caso) deve risultare nullo e questo implica che il raggio vettore e la forza siano paralleli fra loro (o più precisamente antiparalleli), quindi la forza deve essere disposta lungo la direzione congiungente il centro del Sole con il centro del pianeta, ossia deve essere radiale.

Oppure si può partire dall'assunto che la forza sia radiale e quindi constatare (scegliendo come polo il Sole) che il momento della forza è nullo, essendo per un moto radiale **r** ed **F** paralleli (o antiparalleli).

La costanza di **L** implica che il moto debba essere piano, cioè deve avvenire sempre nello stesso piano. Infatti dalla relazione **L** = **r** x m**v** si vede che, fissate le condizioni iniziali del raggio vettore **r** e della q.d.m. m**v** questi

due vettori individuano un piano a cui **L** è perpendicolare e pertanto se **L** è fisso anche il piano resta fisso nello spazio.
Inoltre il verso di **L** implica che il moto avvenga in un senso oppure nell'altro.
Quindi da una proprietà della teoria – la costanza di **L** – si deduce la legge delle aree e la planarità del moto orbitale.

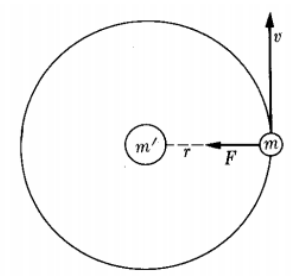
L'espressione matematica della forza, ossia che la forza oltre ad essere diretta lungo **r** (forza radiale) dipenda esclusivamente dal suo modulo (forza centrale), e non ad esempio dall'angolo che **r** forma con una certa direzione di riferimento) e quale tipo di dipendenza fosse, fu scoperto da Newton con la sua legge di gravitazione universale. Lo vediamo nella seguente nota.

Premessa: la terza legge di Keplero dice che per i pianeti i che orbitano intorno al sole si ha $R^3 = C\ P^2$ dove C è una costante. Per maggiore chiarezza (essendo la costante riferita ai moti dei pianeti che orbitano intorno al Sole) chiamiamo C costante di Keplero del Sole e la indichiamo con il pedice S.

$$C_S = \frac{r^3}{P^2}$$

(ribadiamo che in questa formula r sono i raggi medi dei pianeti del Sole e P i loro periodi).

Newton considerò per semplicità un moto circolare uniforme con la massa M (in figura indicata con m') centro delle forze, in quanto supponiamo m << M (sistema inerziale centrato su M).



Sappiamo dalla teoria che affinché avvenga un tale moto vi deve essere una forza, detta centripeta, esercitata da M su m che deve avere la seguente espressione $F = mv^2/r$ dove v è la velocità di m ed r il suo raggio.

Pensiamo per focalizzare il discorso che m si la massa della Terra m_T ed M la massa del Sole m_S:

$$F_{centripeta} = m_T \frac{\mathrm{v}^2}{r}$$ per il moto circolare uniforme si ha $\mathrm{v} = \frac{2\pi r}{P}$ dove P è il periodo, dunque

$$F_{centripeta} = m_T \frac{1}{r} \frac{4\pi^2 r^2}{P^2}$$ moltiplicando e dividendo per r si ha

$$F_{centripeta} = m_T \frac{1}{r^2} \frac{4\pi^2 r^3}{P^2}$$

Notando che r^3/P^2 altro non è che la costante di Keplero del Sole possiamo scrivere

$$F_{centripeta} = 4\pi^2 \frac{m_T}{r^2} C_S$$

Il colpo di genio di Newton fu quello di dire che il Sole, per il terzo principio della dinamica, sentirà una forza F' uguale ed opposta a F (forza percepita dalla Terra), ed allora uguaglia F ad F', ciò significa dover scambiare semplicemente i pedici di m e C:

$$\boxed{F_{centripeta} = 4\pi^2 \frac{m_T}{r^2} C_S = F' = 4\pi^2 \frac{m_S}{r^2} C_T}$$

Allora ne segue che

$m_T C_S = m_S C_T$ ossia dovrà essere $\dfrac{C_S}{m_S} = \dfrac{C_T}{m_T}$

ed il suo colpo di genio esplode supponendo che se questa uguaglianza deve valere per il Sole e la Terra perché non pensare che valga per qualsiasi coppia di masse ossia che sia una proprietà universale!!!!

$$\frac{C_S}{m_S} = \frac{C_T}{m_T} = \frac{C_{saturno}}{m_{saturno}} = \frac{C_{luna}}{m_{luna}} = \frac{C_{gian}}{m_{gian}} \text{costante}$$

Newton esplicitò tale costante nel seguente modo

$\dfrac{C_S}{m_S} = \dfrac{C_T}{m_T} = \dfrac{C_{saturno}}{m_{saturno}} = \dfrac{C_{luna}}{m_{luna}} = \text{costante} = \dfrac{G}{4\pi^2}$ (con G costante)

perché tale scrittura semplificherà l'espressione a cui si arriverà. Infatti si ha

$C_S = m_S \dfrac{G}{4\pi^2}$ che sostituita nell'espressione di F sopra ricavata ci dà

$$F_{centripeta} = 4\pi^2 \frac{m_T}{r^2} m_S \frac{G}{4\pi^2}$$

e semplificando (ecco perché quel 4 π^2) si arriva alla formula che lo porrà nella storia della scienza come stella di prima grandezza (fu in effetti la sua più grande scoperta):

$$\boxed{F(r) = G\frac{m_S m_T}{r^2}}$$

Newton arriva così a dimostrare che la forza è di tipo centrale, cioè che dipende esclusivamente dal modulo della distanza ed esplicita il tipo di dipendenza dalla distanza. Avendo già precedentemente stabilito che essa è radiale e di tipo solamente attrattivo, la sua espressione vettoriale sarà:

$$\boxed{\boldsymbol{F}(r) = -G\frac{m_S m_T}{r^2}\boldsymbol{u}_r}$$

dove il versore punta dall'origine (il centro del sole dell'esempio precedente) al punto di interesse).

E più in generale, *quindi universalmente*, due corpi dotati di massa M ed m (con M >> m e SR inerziale centrato su M) si attrarranno secondo la legge di gravitazione universale

$$\boxed{\boldsymbol{F}(r) = -G\frac{M\,m}{r^2}\boldsymbol{u}_r}$$

dove il versore punta dall'origine (il centro di M) al punto di interesse (centro di m).

Ad un tale risultato si giunge anche, usando una matematica più complessa, considerando le orbite ellittiche.

L'interazione gravitazionale è dunque una forza centrale, sempre attrattiva che varia con l'inverso del quadrato della distanza.

b) *Orbita ellittica*

Il fatto che traiettoria sia ellittica può essere dimostrato a partire dalla conservazione dell'energia.

Partiamo dal fatto che una forza centrale è conservativa. Una forza si dice conservativa quando il suo lavoro che matematicamente è un integrale curvilineo, non dipende dal percorso seguito per calcolare tale integrale ma solo dai suoi estremi, che sono i due punti di partenza e di arrivo sulla traiettoria. Nel nostro caso, sapendo che F è centrale si ha:

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_A^B \boldsymbol{F(r)}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B F(r)\boldsymbol{u}_R\cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B F(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B \frac{F(r)}{r}d(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) = \int_A^B \frac{F(r)}{2r}dr^2 \\ &= \int_A^B \frac{F(r)}{2r}2r\,dr = \int_A^B F(r)\,dr = V(B)-V(A) \end{aligned} \qquad (1)$$

Dunque se F(r) ammette una primitiva V, cosa che avviene generalmente – quasi tutte le funzioni che si incontrano in fisica sono integrabili - allora il campo è conservativo. Questo implica che il lavoro su un percorso chiuso – tale integrale è detto "circuitazione" - è nullo. $L = \oint \boldsymbol{F(r)}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$

Un modo alternativo di giungere allo stesso risultato è quello di utilizzare un'altra definizione di forza conservativa: una forza si dice conservativa quando la forma differenziale del suo lavoro è un differenziale esatto.

Nota teorica
Definizione: la forma differenziale lineare, definita su un certo dominio D nel campo reale, è del tipo
A(x,y,z) dx + B(x,y,z) dy + C(x,y,z) dz
e viene detta esatta se esiste una qualche funzione scalare V = V(x,y,z) definita su D tale che il suo differenziale totale coincida con la forma diffrenziale

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)dz = A\,dx + B\,dy + C\,dz$$

La funzione V è detta potenziale del campo vettoriale **F** = A **i** + B **j** + C **k.**

Scriviamo il lavoro espandendo le componenti

$$L_{AB} = \int_A^B dL = \int_A^B \boldsymbol{F(r)} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz); \;\; dL = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

riconosciamo così l'integrando essere una forma differenziale. Tale integrale dipende dal percorso che si sceglie per eseguire il calcolo dell'integrale, noi però siamo interessati a vedere quali siano le condizioni affinché tale integrale dipenda solo dagli estremi A e B. Tale condizione effettivamente esiste ed è la seguente: la forma differenziale dL deve essere il differenziale di una funzione scalare V delle sole coordinate, cioè deve risultare

$$\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} = F_x; \quad \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} = F_y; \quad \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} = F_z$$

Se ciò accade si dice che la forma differenziale è esatta.
Infatti quando questa condizione è soddisfatta allora l'integrale di linea può essere così sviluppato

$$L_{AB} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_A^B \left(\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} dx + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} dy + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} dz\right)$$

$$= \int_A^B dV = V(B) - V(A)$$

Ritrovando così la (1).
Abbiamo notato a commento della (1) che generalmente **F** ammetta una primitiva, vediamo adesso le condizioni a cui deve soddisfare **F** affinché ciò avvenga.
A tal fine invocando il teorema di Schartz si può senz'altro affermare che un campo di forze **f** (f_x, f_y, f_z) – definito in uno spazio semplicemente connesso – è conservativo se

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y}; \quad \frac{\partial f_z}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial z}$$

Ed è facile verificare che per la forza gravitazionale queste relazioni sono soddisfatte.
Scriviamo, a tal uopo, la forza gravitazione esplicitando le coordinate (ricordando che $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e che $\mathbf{u}_R = \mathbf{r}/r$) e facciamo le derivate richieste

$$F_x = G\frac{Mm\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}; \quad F_y = G\frac{Mm\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}; \quad F_z = G\frac{Mm\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}};$$

Per semplicità poniamo GMm = cost = 1

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}};$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{-3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{-3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}};$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{-3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{-3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

Verificato dunque che la forza gravitazione è conservativa sarà possibile associare ad essa la funzione scalare potenziale V =V(x,y,z), avendosi

$$L_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{F(r)} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B -G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{u}_r \cdot d\boldsymbol{r} = -GMm\int_A^B -\frac{dr}{r^2} = GMm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = V(B) - V(A)$$

Dunque

$$V = G\frac{Mm}{r} + \cos t$$

Al potenziale viene associato la grandezza ad essa praticamente coincidente energia potenziale che differisce unicamente per il segno (si fa questo per uno scopo di pura praticità, ossia per avere nella conservazione dell'energia la somma di K e U anziché la loro differenza).
U = - V

$$U = -G\frac{Mm}{r} + \cos t$$

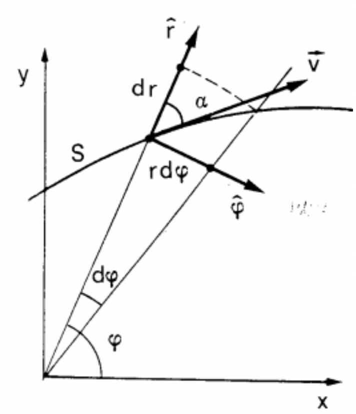
Ora siamo in grado di scrivere la conservazione dell'energia di un sistema del tipo Sole-Terra con M massa del Sole ed m quella della Terra (M>>m).
K + U = E

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 - G\frac{Mm}{r} = E \equiv \cos t \qquad (2)$$

Esplicitiamo questa relazione in coordinate polari. Trattandosi di un moto piano, possiamo scegliere il piano xy coincidente con il piano dell'orbita; per descrivere il moto, sono sufficienti allora due parametri e non più tre, scegliamo il raggio e l'angolo (anomalia), allora le componenti della velocità sono

$$\mathbf{v} = \mathrm{v}_r\boldsymbol{u}_r + \mathrm{v}_\varphi\boldsymbol{u}_\varphi = \mathrm{v}\cos\alpha\,\boldsymbol{u}_r + \mathrm{v}\cos\alpha\boldsymbol{u}_\varphi = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{u}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{u}_\varphi$$

Nella figura seguente viene schematizzata la situazione



Pertanto la (2) diviene

$$\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = E + G\frac{Mm}{r} \quad (3)$$

Occorre in qualche modo "togliere" il differenziale dell'anomalia, a tal fine ricordiamo che il modulo del momento angolare L è L = r mv sinα ed in coordinate polari è

$$L = rm(\mathrm{v}\sin\alpha) = rm\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)$$

Ed allora

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2} \quad (4)$$

e si ricordi che L è una quantità costante durante il moto, allora la (3) diviene

$$\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{L}{mr^2}\right)^2\right] = E + G\frac{Mm}{r} \text{ da cui}$$

$$\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\frac{L}{mr^2}\right)^2\right]=E+G\frac{Mm}{r}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{L^2}{m^2r^2}=\frac{2E}{m}+\frac{2GM}{r}$$

$$\frac{dr}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2E}{m}+\frac{2GM}{r}-\frac{L^2}{m^2r^2}} \quad (5)$$

Quest'ultima relazione è un'equazione differenziale del primo ordine che non è possibile risolvere analiticamente [vedi nota (1)]. La natura non sempre è così semplice come noi vorremmo! Anche nel caso più semplice di due corpi interagenti gravitazionalmente, non è possibile ottenere un'equazione oraria del moto.

Tuttavia siamo qui interessati a trovare l'equazione della traiettoria, cioè la relazione fra il raggio e l'anomalia r = r (φ). A tal uopo dividiamo membro a membro la (4) con la (5)

$$\frac{d\varphi}{dr}=\frac{L}{mr^2}\frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{2E}{m}+\frac{2GM}{r}-\frac{L^2}{m^2r^2}}}$$

$$d\varphi=\frac{dr}{r^2}\frac{\pm b}{\sqrt{-1+\frac{2a}{r}-+\frac{b^2}{r^2}}} \quad (6)$$

Dove si è semplificata la scrittura introducendo le costanti a e b (reali e positive, in quanto stiamo considerando un sistema legato avente quindi energia totale negativa E<0)

$$b=\sqrt{-\frac{L^2}{2Em}}$$

$$a=-\frac{GMm}{2E}$$

La (6) può essere integrata membro a membro ottenendo

$\varphi(r)=\varphi_0+\arccos\frac{b^2-ar}{r\sqrt{a^2-b^2}}$ dove φ_0 è una costante di integrazione che può essere posta uguale a zero pur di scegliere opportunamente l'orientamento degli assi coordinati. Quindi in tale situazione si ha

$\cos\varphi(r)=\frac{b^2-ar}{r\sqrt{a^2-b^2}}$ arrivando così alla cercata equazione della traiettoria:

$$r(\varphi)=\frac{b^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\varphi} \quad (7)$$

Ricordando che l'equazione di una ellisse in coordinate polari è

$$r(\varphi)=\frac{b^2}{a+e\cos\varphi}$$

la (7) rappresenta proprio una ellisse con asse maggiore a asse minore b e con eccentricità
$e = (a^2 - b^2)^{1/2}$.

Vediamo ad esempio il valore numerico di a e b per la Luna.

$$\frac{1}{2}m_L v^2 - G\frac{M_T m_L}{R_{T-L}} = E$$

Il valore della velocità orbitale della Luna è:

$$v_{T-L} = \frac{2\pi R_{T-L}}{P} = \frac{2\pi\cdot 385\cdot 10^6}{2.36\cdot 10^6} = 1024\, m/s = 1.02\, km/s$$

(quella della terra nel suo moto di rivoluzione intorno al Sole è 30 km/s)

$$E = \frac{1}{2}7.35\cdot 10^{22}\cdot 1024^2 - 6.67\cdot 10^{-11}\frac{6\cdot 10^{24}\cdot 7.35\cdot 10^{22}}{385\cdot 10^6} = 3.85\cdot 10^{28} - 7.64\cdot 10^{28} = -3.79\cdot 10^{28}\, J$$

Come ci si aspettava il valore dell'energia totale meccanica è negativa come deve essere per un sistema legato. Il valore del momento angolare è

$$L = m\omega R_{T-L}^2 = 7.35\cdot 10^{22}\cdot 2.66\cdot 10^{-6}\cdot (385\cdot 10^6)^2 = 2.90\cdot 10^{34}\, kg\, m^2/s$$

Dunque

$$b = \sqrt{-\frac{(2.90\cdot 10^{34})^2}{2\cdot(-3.79\cdot 10^{28})\cdot 7.35\cdot 10^{22}}} = \sqrt{\frac{8.41\cdot 10^{68}}{55.7\cdot 10^{50}}} = 3.89\cdot 10^8\, m$$

$$a = -\frac{GMm}{2E} = -\frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 6.0\cdot 10^{24}\cdot 7.35\cdot 10^{22}}{2\cdot(-3.79\cdot 10^{28})} = 3.88\cdot 10^8\, m$$

A causa delle approssimazioni nel calcolo il valore di a risulta essere maggiore del valore di b, ovviamente facendo i calcoli in modo più raffinato si ottiene il risultato atteso e = $(a^2 - b^2)$^(1/2) = 0.005.

Ed allora l'equazione, con valori numerici un po' approssimativi, della traiettoria della Luna è

$$r(\varphi) = \frac{15.1\cdot 10^{16}}{3.88\cdot 10^8 + 0.055\cos\varphi}$$

Graficando tale curva si ha praticamente una circonferenza. Lo si vede immediatamente in quanto il termine del coseno praticamente è molto vicino allo zero risultando così il valore del raggio costante.

Nota (1)

Il Mencuccini-Silvestrini riporta la seguente affermazione a commento della (5): "l'equazione differenziale del primo ordine potrebbe essere risolta con relativa facilità per separazione di variabili, ottenendo così l'equazione oraria del moto, che poi sostituita nella (4) anche quest'ultima potrebbe essere risolta per separazione di variabili fornendo la legge oraria per l'anomalia". Affermazione alquanto bizzarra. La natura non sempre accontenta le nostre aspettative! Infatti…si ha:

posto a>0, b>0 e c>0 l'equazione si scrive:

$$r'(t) = \sqrt{a + \frac{b}{r(t)} - \frac{c}{r^2(t)}}$$

$$\frac{r'(t)}{\sqrt{a + \frac{b}{r(t)} - \frac{c}{r^2(t)}}} = 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a + \frac{b}{r(t)} - \frac{c}{r^2(t)}}} r'(t)\, dt = \int 1 dt \qquad \textit{che risolta ci dà la seguente soluzione}$$

$$\frac{\sqrt{a r^2(t) + b r(t) - c}}{a} + \frac{b}{2\sqrt{a^3}} \log[ab + 2a^2 r(t) - 2\sqrt{a^3}\sqrt{a r^2(t) + b r(t) - c}] = t + k$$

Ottenendo così un'equazione implicita nell'incognita r(t) **che purtroppo non è possibile esplicitare** per ogni t > 0. Quindi anche **avere una equazione oraria per l'anomalia è pura fantasia**. In questi casi vi è un'unica strada percorribile ossia una soluzione numerica. Quindi ad esempio si potrebbero considerare le due equazioni (4) e (5) a sistema, esplicitando le condizioni iniziali si potrebbe procedere con il metodo Runge-Kuttan che sono un'importante famiglia di metodi iterativi impliciti ed espliciti per l'approssimazione delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie, sapendo per certo che sarà possibile determinare i grafici r(t) e φ (t).

c) *La terza legge di Keplero*

La terza legge di Keplero potrebbe essere dimostrata nel caso generale risolvendo l'equazione (5), ma per semplicità lo vediamo pensando al moto circolare che diviene un moto circolare uniforme. Lo si vede immediatamente dalla (4) in quanto sia L che r sono costanti la velocità angolare sarà anch'essa costante.
Scriviamo l'equazione F = ma applicata in questo caso

$$-G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{u}_r = -m\omega^2 r\, \boldsymbol{u}_r$$

$GM = \omega^2 r^3$ e ricordando che $\omega = \frac{2\pi}{P}$ si ha $GM = \frac{4\pi^2}{P^2} r^3$ e quindi

$$\frac{r^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \cos t$$

Questa relazione essendo indipendente da m dimostra per i moti circolari la terza legge di Keplero.
Notando come già visto che l'eccentricità dei pianeti è molto prossima al valore zero l'approssimazione di orbita circolare è una buona descrizione del fenomeno.

Newton però non conosceva il principio di conservazione dell'energia (che vede la luce con Joule nel 1843)
Dapprima Newton trattò tale problema nel suo breve trattato *De motu*, e poi lo perfezionò nei suoi *Principia.*
La sua dimostrazione si basava sui tre principi della dinamica, da lui stesso codificati, e dalla legge della gravitazione universale, suo maggior successo scientifico. Tale dimostrazione era però principalmente geometrica e si fondava sulle proprietà delle curve coniche, il cui studio risale al III secolo a.C., e sul metodo

della *extrema ratio,* cioè di quello che oggi chiamiamo teoria dei limiti o più in generale analisi matematica. Tale branca della matematica prende avvio proprio da Newton e indipendentemente da Leibnitz.
Per inciso il grande fisico Richard Feynman nel 1964, trovando egli stesso ostico seguire i complessi ragionamenti geometrici di Newton rifece a modo suo la dimostrazione, rendendola più comprensibile ad un pubblico moderno. Per chi fosse interessato può consultare il libro *Il moto dei pianeti intorno al Sole* di D.L. Goodstein (Zanichelli).

Newton stesso verificò la correttezza della sua legge di gravitazione confrontando l'accelerazione centripeta della Luna con l'accelerazione di gravità terrestre g = 9.80 m/s^2 (questo valore era noto sin dai tempi di Galileo).
Per inciso la teoria di Newton nulla dice circa il valore della costante G. La prima misura indiretta della costante di gravitazione universale fu ottenuta nel 1774 dall'astronomo Nevil Maskelyne, su suggerimento di Henry Cavendish, nell'esperimento dello Schiehallion, atto a misurare la densità media della Terra e dal valore di questa risalire tramite la relazione della forza gravitazionale applicata ad un grave, al valore di G. Successivamente. Egli misuro, per la densità del nostro pianeta, un valore di 4.5 kg/m^3 (valore attuale 5.5 kg/m^3). Nel 1798, lo stesso Cavendish eseguì direttamente un proprio esperimento tendente a misura direttamente il valore della costante G,tramite una bilancia di torsione ottenendo un valore molto vicino a quello attuale (G = 6.67 $\cdot 10^{-11}$ N m^2/ kg).
Newton ipotizzò che sia la Luna sia una qualsiasi alta massa ad una certa distanza dalla Terra fossero attratti verso di essa secondo la formula da lui scoperta. Egli considera la Terra, la Luna ed un grave (possiamo pensare ad esempio alla classica mela), ossia un corpo posto nelle immediate vicinanze della superficie terrestre per cui si può porre la sua distanza coincidente con il valore del raggio terrestre (valore noto fin da Eratostene). Le due forze sono allora:

$$F_{sulla\,mela} = G\frac{m_T m_{mela}}{R_T^2} = m_{mela}a_{mela}$$

$$F_{sulla\,luna} = G\frac{m_T m_{luna}}{R_{T-L}^2} = m_{luna}a_{luna}$$

I valori delle accelerazioni sono

$$a_{mela} = G\frac{m_T}{R_T^2}$$

$$a_{luna} = G\frac{m_T}{R_{T-L}^2}$$

Ribattezziamo la notazione per le accelerazioni usando il simbolo g che è il più usato quando ci si riferisca aduna accelerazione dovuta alla gravità di un corpo

$$g_{mela} = G\frac{m_T}{R_T^2}$$

$$g_{luna} = G\frac{m_T}{R_{T-L}^2}$$

L'accelerazione del grave è dunque g_{mela} = 9.8 m/s^2 che in virtù del fatto che essa è comune a tutti i gravi possiamo indicare semplicemente con g.
Era noto che il valore della distanza Terra-Luna era circa 60 volte il valore del raggio terrestre, per cui si ha

$$g = G\frac{m_T}{R_T^2}$$

$$g_{luna} \approx G\frac{m_T}{(60R_T)^2} = \frac{1}{3600}G\frac{m_T}{R_T^2} = \frac{1}{3600}g = \frac{1}{3600}9.80 = 2.7\cdot 10^{-3}\,m/s^2$$

Scoprì così che l'accelerazione di gravità della Luna secondo la sua teoria doveva valere circa (1/3600) g.

Non gli rimase da fare altro che verificare tale valore coincidesse con l'accelerazione che compete ad un corpo che si muove di un moto circolare uniforme v^2/R

$$a_{centr} = \frac{v^2}{R_{T-L}} = \frac{(2\pi R_{T-L}/P)^2}{R_{T-L}} = \frac{4\pi^2 R_{T-L}}{P^2} \approx \frac{4\pi^2 60 R_T}{P^2}$$

introducendo i valori di R_T e P (noti a quell'epoca) si ha

$$a_{centr} = \frac{4\pi^2 60 \cdot 6.4 \cdot 10^6}{(2.36 \cdot 10^6)^2} = 2.7 \cdot 10^{-3}\ m/s^2$$

Trovando così la sostanziale uguaglianza fra $a_{cent-Luna}$ e g_L, ossia l'accelerazione di gravità calcolata con la sua teoria. Verificò in questo modo la validità della sua costruzione teorica che cioè l'accelerazione centripeta della Luna è proprio dovuta all'attrazione gravitazionale esercitata su di essa dalla Terra.

Egli annotò: *"Ho confrontato la forza necessaria per mantenere la luna nella sua orbita con la forza di gravità sulla terra ed ho trovato che concordano."*

Concludiamo questa nota sulla gravitazione, inquadrata da un punto di vista storico, con qualche altra considerazione.

La forza peso

Secondo Voltaire, fu osservando la caduta di una mela nel suo giardino che Newton ebbe la sua idea rivoluzionaria rispetto alla cultura del suo tempo, che cioè la forza peso – la forza responsabile della caduta degli oggetti sulla superficie terrestre (detti "gravi") – altro non è che la forza gravitazionale con cui la Terra attira verso il suo centro ad essa circostanti, ed è dunque anche la stessa forza in virtù della quale –

ad esempio – la Luna orbita intorno alla Terra. La forza con cui un corpo viene attratto dalla Terra si può scrivere (proprio sfruttando la seconda legge della dinamica da lui stesso concepita: F = ma)

$\mathbf{F} = m\mathbf{g}$

m = massa del corpo

g = accelerazione di gravità

in virtù del significato specifico dell'accelerazione, gli è stata attribuita un simbolo tutto suo, la lettera g.

L'idea è allora di porre questa forza pari a quella gravitazionale della Terra

$m\mathbf{g} = -G\frac{Mm}{r^2}\mathbf{u}_R$ dove il versore punta dal centro della Terra verso l'esterno

L'accelerazione di gravità punta verso il centro della Terra, per cui si ha

$-mg\mathbf{u}_R = -G\frac{Mm}{r^2}\mathbf{u}_R$ ed allora il problema diventa unidimensionale

$$mg = G\frac{Mm}{r^2}$$

E semplificando si ha

$$g = G\frac{M}{r^2}$$

Se in questa espressione poniamo la distanza del grave dal centro della Terra proprio uguale al raggio terrestre , e nominando la g con il pedice zero, si ha

$$g_0 = G\frac{M}{R_T^2} = 6.67 \cdot 10^{-11}\frac{6 \cdot 10^{24}}{(6.4 \cdot 10^6)^2} = 9.8\, m/s^2$$

Se invece siamo ad una certa quota h rispetto alla superficie si ha: $r = R_T + h$ e l'accelerazione di gravità vale

$$g = G\frac{M}{(R_T + h)^2} = G\frac{M}{R_T^2 + h^2 + 2R_T h} = G\frac{M}{R_T^2(1 + h^2/R_T^2 + 2h/R_T)} = G\frac{M}{R_T^2(1 + h/R_T)^2}$$

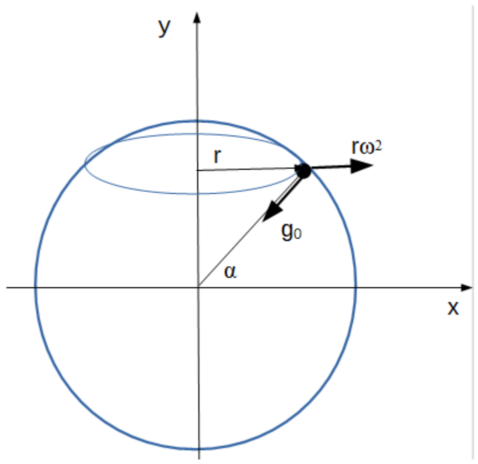
Siccome per quanto vogliamo pensare la quota alta sarà sempre $h \ll R_T$ possiamo sviluppare il binomio, avendo:

$$g = G\frac{M}{R_T^2(1 + h/R_T)^2} \approx G\frac{M}{R_T^2}\left(1 - \frac{2h}{R_T}\right) = g_0\left(1 - \frac{2h}{R_T}\right)$$

Dove vediamo che per una quota di qualche chilometro il termine correttivo incide sul valore di g per meno dell'uno per mille.

Finora ci siamo posti in un SR inerziale, se invece volessimo voler tener conto del fatto che un laboratorio terrestre non è un SR inerziale in quanto sottoposto al moto di trascinamento dovuto al moto di rotazione della Terra intorno al suo asse dobbiamo usare la relazione $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{rel} + \mathbf{a}_{tr}$ avendo trascurato il moto di rivoluzione della Terra intorno al Sole e pensando che il nostro grave inizi il suo moto da fermo in modo che l'accelerazione di Coriolis sia nulla.

Facendo riferimento alla figura seguente



La forza peso si scrive come somma del contributo statico (Terra non in rotazione) più la forza apparente dovuto al fatto che il grave ruota su una circonferenza di raggio $r = R_T \cos\alpha$ dove α è la latitudine.

$$F_P = -mg_0\mathbf{u}_{R_T} + m\omega^2 r\mathbf{u}_r$$

È immediato osservare che
$$\boldsymbol{u}_{R_T} = \cos\alpha\, \boldsymbol{i} + \sin\alpha\, \boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{i}$$

Dunque

$$F_P = -mg_0(\cos\alpha\, \boldsymbol{i} + \sin\alpha\, \boldsymbol{j}) + m\omega^2 R_T \cos\alpha\, \boldsymbol{i} = m(-g_0\cos\alpha + \omega^2 R_T \cos\alpha)\boldsymbol{i} - mg_0 \sin\alpha\, \boldsymbol{j}$$

Da cui si vede che ai poli dove α = 90°

$$\boldsymbol{F}_P = -mg_0\, \boldsymbol{j}$$

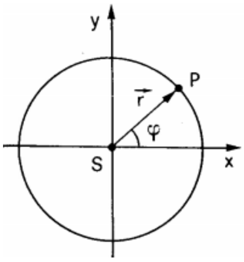
mentre all'equatore

$$\boldsymbol{F}_P = m(-g_0 + \omega^2 R_T)\boldsymbol{i}$$

Nelle situazioni intermedie la forza perso viene leggermente modificata sia in direzione che in modulo, comunque essendo il valore massimo (all'equatore) dell'accelerazione centrifuga pari a $3.37 \cdot 10^{-2}$ rad/s entro un errore dello 0.3% possiamo considerare g costante.

Il potenziale efficace ed orbita di equilibrio

Come abbiamo visto ogni pianeta percorre intorno al Sole un'orbita praticamente circolare. Se trascuriamo le deboli interazioni gravitazionali fra di essi che portano il sistema planetario ad essere un sistema caotico, se ci limitiamo quindi a considerare un arco di tempo non grandissimo (quanche miliardo di anni) possiamo dire che l'orbita di un pianeta è stabile. Se qualcuno cercasse di aumentare o diminuire il raggio dell'orbita (fissata la velocità di rivoluzione o meglio fissato il valore del momentoo angolare), il pianeta verrebbe riattratto verso la sua orbita originaria da una forza di richiamo. Per vedere cosa accade poniamoci in un SR non inerziale ma rotante, con origine nel Sole ed un asse – asse r – diretto dal Sole verso la posizione P occupata istante per istante dal pianeta. Come in figura.



Tale asse ha una velocità angolare ω = dφ/dt . In tale SR il pianeta è allora soggetto altre che alla forza di gravitazione – GMm/r^2) $\boldsymbol{u}_r$, anche alla forza apparente centrifuga $m\omega^2 r\, \boldsymbol{u}_r$. Allora la componente radiale della forza F_r del risultante delle forze è

$$F_r = -G\frac{Mm}{r^2} + m\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 r$$

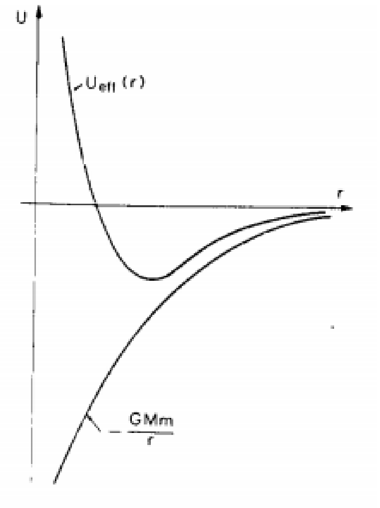
Siccome l'orbita è non perfettamente circolare la velocità angolare non sarà perfettamente costante, ma sarà perfettamente costante il momento angolare. Conviene dunque esprimere la forza centrifuga in termini di L, cosa che può essere fatta facilmente ricordando la (4) si ottiene

$$F_r = -G\frac{Mm}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3}$$

Questa è una forza conservativa, essendo una forza centrale, e possiamo calcolare la sua energia potenziale che viene detta "efficace", si ha (scegliendo pari a zero la costante di integrazione in modo che il potenziale sia nullo all'infinito:

$$U_{ff} = -V_{eff} = -\int F_r dr = -\int\left(-G\frac{Mm}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3}\right)dr = -G\frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

L'andamento di tale funzione è come quello in figura



Essa si annulla per $r \equiv \bar{r} = \frac{L^2}{2GMm^2}$ e presenta un minimo per

$$r \equiv r_0 = 2\bar{r} = \frac{L^2}{GMm^2}$$

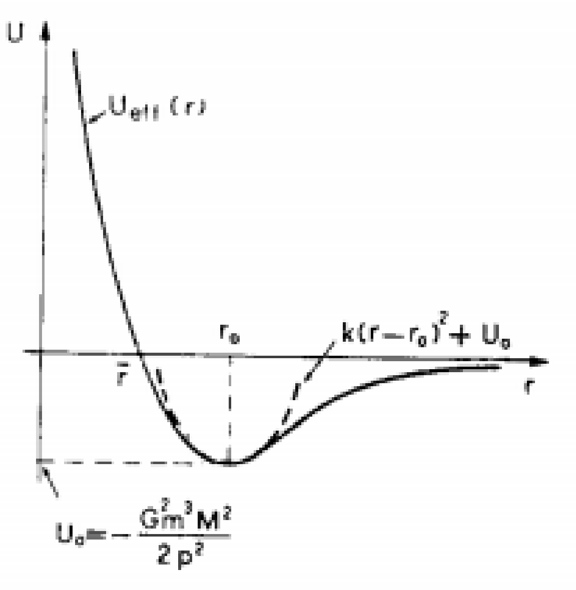
Come noto il punto di minimo dell'energia potanziale rappresenta un punto di equilibrio stabile nel SR rotante. Fissato cioè un certo valore per il momento angolare, esiste un solo preciso valore r_0 per il raggio tale che se in esso viene posto il pianeta con velocità radiale nulla (e dunque solo con velocità tangenziale corrispondente a quel valore di L) esso resta in quella posizione stabilmente, percorrendo nel SR inerziale un moto circolare.

Vediamo cosa succede se il pianeta viene posto su un'orbita leggermente diversa da quella con raggio r_0.

Vediamo che intorno al punto di minima energia potenziale la funzione può essere ben approssimata da una funzione del tipo $U(r) = k\,(r - r_0)^2 + U_0$ dove k è una opportuna costante e tale funzione è come evidente una funzione caratteristica di una forza elastica (con costante elastica k).
Dunque il pianeta sarà soggetto ad una forza di richiamo che può essere così espressa

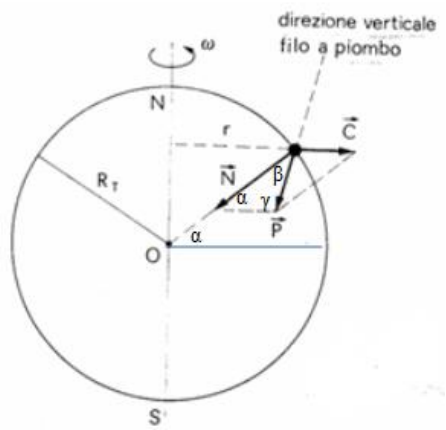
$$F_r = -\frac{\partial U_{ff}}{\partial r} \simeq -\frac{\partial}{\partial r}(k(r-r_0)^2) = -2k(r-r_0)$$

Tale situazione può essere visualizzata dal seguente grafico.



Inerzia e gravitazione

Da quanto visto sinora sembrerebbe che la materia possedesse due proprietà concettualmente distinte in riferimento alla grandezza massa: da un lato la massa inerziale (la sua capacità ad offrire resistenza al moto) e dall'altro la massa gravitazionale (quella proprietà che gli permette di attrarre ed essere attratto dagli altri corpi massivi). Come discusso al paragrafo III.6 del Mencuccini – Sivestrini è un fatto sperimentale che le due masse siano fra esse proporzionali. Si può allora osservare che la forza peso **P**, in un dato luogo di un dato corpo in quiete rispetto alla superficie terrestre, rappresenta nel SR non inerziale solidale con la Terra, a cui ogni laboratorio appartiene, la somma di due contributi, uno gravitazionale dovuto all'attrazione che la Terra esercita su di esso **N** e l'altro inerziale dovuto alla forza centrifuga **C.** In riferimento alla figura seguente si ha:



$N = G\dfrac{Mm_g}{R_T^2}$ $\qquad\qquad$ $m_g = massa\ gravitazionale$

$C = m_i\omega^2 r = m_i\omega^2 R_T \cos\alpha$ $\qquad$ $m_i = massa\ inerziale$

La direzione di P (angolo β) rappreasenta la direzione filo a piombo (della verticale) nel luogo considerato.

Applicando la legge dei seni si ha $\dfrac{N}{\sin\gamma} = \dfrac{C}{\sin\beta}$ cotg

$$\frac{N}{C}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=\frac{\sin((\pi-(\alpha+\beta))}{\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\beta}=\sin\alpha\,\mathrm{cotg}\beta-\cos\alpha$$

Quindi fissato l'angolo della latitudine la direzione del filo a piombo dipende esclusivamente dal valore

rapporto N/C dato da

$$\frac{N}{C}=\frac{GM}{R_T^2\omega^2 d}\frac{m_g}{m_i}$$

E quindi dipende dal valore del rapporto fra la massa gravitazionale ed inerziale.

L'esperienza dimostra che la direzione della vericale in un dato luogo è la stessa per tutti i corpi quali che siano le dimensioni o la loro composizione chimica. Dunque sperimentalmente le due masse coincidono. Sarà poi Einstein a porre questa uguagliamza addirittura come principio nella sua Relatività Generale asserendo l'dentità concettuale (oltre che sperimentale) fra massa gravitazionale ed inerziale, quindi l'impossibilità di distinguere tra la forza di inerzia da quella gravitazionale.

Le verifiche sperimentali dell'equivalenza tra massa inerziale e gravitazionale sono state effettuate mediante l'uso di piani inclinati (Galileo), pendoli (Newton), fino ad arrivare alle bilance di torsione (Loránd Eötvös). Attualmente la precisione raggiunta dagli esperimenti è nell'ordine di una parte su mille miliardi, precisione ottenuta dalla misurazione della distanza lunare tramite laser.